This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

https://books.google.com

Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

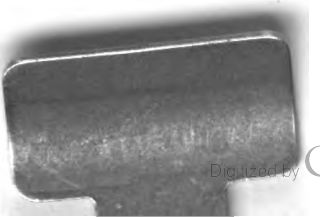
Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`

Digitized by Google

Math

The University of Chicago
Libraries



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

THE UNIVERSITY OF CHICAGO LIBRARY
math

BOLLETTINO
DI
BIBLIOGRAFIA E STORIA
DELLE
SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA
DI
GINO LORIA

ANNO XVI
1914

TORINO
ROSENBERG & SELLIER
Via Maria Vittoria, 18
1914

Digitized by Google

THE UNIVERSITY OF CHICAGO LIBRARY

Proprietà Letteraria

Pavia - Premiata Tipografia SUCCESSORI FRAT. FUSI.

Digitized by Google

508960

INDICE

A. Favaro, Contribuzioni inedite al carteggio di Evangelista Torricelli, p. 1-6.
E. Bortoletti, Ancora sul nome « algoritmo ». p. 33-38.
F. Podetti, La teoria delle proporzioni in un manoscritto inedito di Evangelista Torricelli, p. 65-76.
E. J. Wilczinski, Alcune vedute generali della geometria moderna, p. 97-108.

RECENSIONI ED ANNUNZI

P. Tannery. Mémoires scientifiques, T. I (T. L. Heath) p. 6-13. — **J. Carlebach**. Lewi ben Gerson (G. L.) p. 13-15. — **Duncan M. Y. Sommerville**. Bibliography of nou euclidian Geometry (G. L.) p. 15-16. — **T. Muir**. The theory of determinants, Vol. (G. L.) p. 16-17. — **H. Hann**. Bericht über die Theorie der linearen Integralgleichungen (G. L.) p. 17. — **F. Fueter**. Die Klassenkörper der komplexen Multiplication (G. L.) p. 18. — **M. Lecat**. Histoire de la thèorie des déterminants à plusieurs dimensions (G. L,) p. 18. — **Smith and Karpinski**. The hindo-arabic numerals (G. L.) p. 18-19, — **G. Darboux**. Eloges académiques et discours (G. L.) p. 19-20. — **A. Favaro**. Archimede (G. L.) p, 20-21. — **I. L. Heiberg**. Naturwissenschaften un Matematik (G. L.) p. 21 — **T. L. Heath**, The « method » of Archimedes (G. L.) p. 22. — **H. Broggi**. Versicherungsmatematik (A. Loewy) p. 22-23. — **A. V, Flotow**. Einleitung in die Astronomie p. 24. — **W. W. Rouse Ball**. Ricreazioni e problemi matematici (G. L.) p. 25. — **G. Fubini**. Lezioni di analisi matematica (E. E. Levi) p. 25-30. — **W. F. Meyer**. Differentialrechnung (G. L.) p. 30. — **E. Czuber**. Differential-und Integralrechnung, I Bd. (G. L.) p. 30-31. — **F. Goms Teixeira**. Obras, T. IV e V (G. L.) 38-39. — **G. A. Maggi**. Dinamica fisica (G. Giorgi) p. 39-48,78-83. — **A. G. Webster**. Dynamics, II ed. p. 48. — **Z. G. De Galdeano**. Les programmas, Algunes conceptes fondamentales, Ensaies de sintesis metematica, Nuove metode de ensenanza, Sumarie (G. Vivanti) p. 49-51. — **W. F. Osgood**. Funktionentheorie, I Bd., II Aufl. (G. Vivanti) p. 51-52. — **J. A. De Segeier**. Groupes finis (G. Vivanti) p. 52. — **A. Padoa**. La logique déductive (G. L.) p. 53. — **Staeckel und Bech**. Lësungen der Aufgaben (G. L.) p. 53-54. — **H. Liebmann**. Nichteuclidische Geometrie, II Aufl. (G. L.) p. 54. — **H. Vuibert**. Les anagliphes (G. L.) p. 55-56. Syllabus of mathematics (G. L.) p. 56-58. — **R. Fricke und F. Klein**. Automorphen Functionen, II Bd. (G. Fubini) p. 59-60, — **D. Hilbert**. Integralgleichuugen (G. Fubini) p. 60-61. Proceedings of the V international Congress (G. L.) p. 61-62. Annuaire du Bureau des Longitudes (G. L.) p. 62. — **J. J. Sylvester**. Mathematical Papers, Vol. IV (G. L.) p. 76-77. — **F. Dingeldey**. Sammlung. von Aufgaben, II Bd. (G. L.) p. 83-85. — **G. Vivanti**. Esercizi di analisi infinitesimale (G. L.) p. 85-87. — **O. Perron**. Kattenbrücheu (G. Vivanti) p. 87-89. — **Th. Caronnet**. Trogonomeirie (G. L.) p. 89. — **M. Amici e S. Medici**. Aritmetica e algebra (E. Gennari) p. 89-92. — **Y. Mikami**. The developement of mathematics in

125203

Digitized by Google

China ad Japan (G. L.) p. 109-117. — **V. Volterra.** Leçons sur les équations intégrales et intégro-différentielles; Leçons sur les fonctions de lignes (E. E. Levi) p. 117-124. — **P. Dienes.** Leçons sur les singularités des fonctions (G. Vivanti) p. 125-126. — **G. Demartres.** Géométrie infinitesimale (G. L.) p. 127.

PUBBLICAZIONI RECENTI SULLA STORIA DELLE MATEMATICHE

Favaro, Pitollet, Bortolotti, Cajori, Bruns, Miller, Eells, Karpinski, p. 93-95.

NOTIZIE

Le cognizioni astronomiche di Dante. Nuovi Modelli Schilling. Correzioni ed aggiunte alla necrologia di **M. Piori** p. 31-32.

Isis. Onoranze a Tartaglia. Un monumento a Laplace. Temi proposti dalla R. Accademia del Belgio p. 64.

Tema preposto dall'Accademia di Danimarca. Carteggio di Eulero. Il IV Centenario della nascita di R. Bacone, p. 95-96.

Forschung und Unterricht. Les inventes de Torre Quevede. Nuovi Manuali Hoepli, p. 128.

Digitized by Google

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E STORIA
DELLE
SCIENZE MATEMATICHE
ANNO XVI, Fasc. I: **Gennaio, Febbraio e Marzo** 1914

CONTRIBUZIONI INEDITE AL CARTEGGIO
di EVANGELISTA TORRICELLI

di ANTONIO FAVARO

Già fin da quando l'Edizione Nazionale delle opere di Galileo Galilei ebbe preso buon avviamento si ridestarono i desiderii degli studiosi per altre edizioni, alle quali fosse venuto in doveroso aiuto lo Stato; e quando quella prima fu portata a felice compimento, quei desiderii si fecero ancor più vivi. Parecchie infatti, e con intenti scientifici, letterari ed anco politici, se ne videro annunziate; ma, ad eccezione d'una sola e che procede alacremente, le altre o si trascinano lentissimamente o vennero, almeno a quanto pare, abbandonate; oppure mutarono carattere quanto alla iniziativa prima che sembrava avessero ricevuta.

Di queste ultime è appunto l'edizione delle opere di Evangelista Torricelli, la quale pareva a principio che dovesse avere essa pure, come la Galileiana, carattere " Nazionale „, e della quale erano stati intrapresi gli studi sotto gli auspicii di una cospicua Accademia e per opera di uno scienziato fra i più valenti che siano vissuti in questi ultimi tempi, ma che poi, per motivi non ben chiari, fu abbandonata alla iniziativa del Comune di Faenza, patria del Torricelli, contribuendo a ciò la circostanza che, proprio in quel torno di tempo nel quale si andava agitando la questione, veniva a compiersi il terzo centenario dalla nascita di colui che fu, se non addirittura il maggiore, certamente fra i maggiori discepoli di Galileo Galilei. Si sperava che in tale occasione, degnamente celebrata, incominciasse a vedere la luce almeno un volume della vagheggiata edizione, però in quella vece si vide soltanto, ma opportunissimo, un opuscolo nel quale ve-

Digitized by Google

nivano date notizie interessantissime intorno alla deliberata pubblicazione, e veniva anche esposto il disegno secondo il quale essa avrebbe avuto luogo (1). Di essa avrebbe naturalmente dovuto far parte anche il Carteggio, e non soltanto limitato alla raccolta delle lettere del Torricelli e di quelle a lui indirizzate, ma altresì delle scritte fra terzi ed a lui relative, come, con tanto vantaggio e, diciamolo pure con tanto plauso, erasi fatto per l'edizione Galileiana. Di tale carteggio nell'opuscolo summenzionato venne anche dato l'" Indice cronologico del Carteggio Scientifico „ (2) e ciò, come del resto avevamo fatto noi pure per Galileo con una apposita pubblicazione, (3) con lo scopo lodevolissimo di richiamare l'attenzione degli studiosi sull'argomento, cosicchè potesse venir suggerita all'editore la indicazione di altri documenti Torricelliani di carattere epistolare.

La presente pubblicazione risponde appunto a questo appello, dando in luce due documenti inediti rappresentati da una lettera del Torricelli al Viviani e di una del Viviani al Torricelli, nessuna delle quali è notata nell'Indice cronologico suaccennato, e coglie la occasione per ricordare che diligenti indagini eseguite nei Manoscritti Galileiani potranno molto probabilmente metterne in evidenza altri, specialmente concernenti il carteggio familiare e quello fra terzi relativi al Torricelli. La distinzione infatti fra carteggio scientifico e carteggio familiare, la quale presiedette all'ordinamento generale dei Manoscritti Galileiani, e che fu seguita anche dall'Albèri nella cosiddetta " Prima Edizione completa „ delle opere di Galileo, si è chiarita all'atto pratico assolutamente inopportuna, e ad ogni modo inconsulta affatto l'esclusione del Carteggio familiare, del quale molti documenti chiariscono, se anche indirettamente, notevoli particolari di quello strettamente scientifico, ed in ogni caso non potrebbero non essere presi in considerazione, quando si tratti di una edizione intesa a raccogliere tutto quanto può contribuire alla piena conoscenza della vita e delle opere di un eminente scienziato quale fu il Torricelli.

---

(1) *La pubblicazione delle opere di Evangelista Torricelli con alcuni documenti inediti.* Notizie e disegno di Giuseppe Vassura, Faenza, stab. tipo-lit. Cav. G. Montanari, giugno 1908.

(2) *Op. cit.*, pag. 53.

(3) Per la Edizione Nazionale delle opere di Galileo Galilei sotto gli auspicii di S. M. il Re d'Italia. *Indice cronologico del Carteggio Galileiano* per cura di Antonio Favaro, Firenze, tip. di G. Barbèra, 1896, pag. 101 in 8° gr.

Digitized by Google

Le due lettere, le quali vengono qui date per la prima volta alla luce, sono ambedue autografe e senza data; e di quella del Torricelli al Viviani stimiamo quasi impossibile il precisarla. Le relazioni tra i due incominciarono quando il Torricelli era ancora a Roma (1) e si disponeva a venire in Arcetri, dove era già il Viviani; proseguirono cordialissime nei circa tre mesi durante i quali furono ambedue ospiti del Gran Vecchio, e tali continuarono sempre fino alla morte del Torricelli avvenuta la notte successiva al 24 ottobre 1647. Questa lettera è senza alcun dubbio posteriore alla morte di Galileo ed appartiene al tempo nel quale i due vissero quasi fraternamente l'uno accanto all'altro, confidente il Viviani dei più riposti pensieri del Torricelli, e giovandosi dei di lui consigli negli studi che assiduamente proseguiva in questo periodo della sua vita che è da risguardarsi come il più fecondo di tutta la sua lunga esistenza (2).

La lettera (3) è del seguente tenore:

Sig.r Viviani mio Sig.re

Prego V. Sa. a voler favorirmi di sentire cotesti SS.ri miei principianti per questa mattina ch'io non posso. Mi farebbe grazia a legger due Proposizioni, cioè la 35 et 36 del Primo d'Euclide; et a quel Sig.re Preti che cominciò hier l'altro potrebbe esplicare l'altra metà delle definizioni del Primo d'Euclide. Il Ser.mo Padrone mandò per me hier sera alle 24 mentre ero fuora; et il cocchiere lasciò l'ordine che se tornavo in tempo andassi a Palazzo. Ho però resoluto d'andare hora. E se potrò sbrigarmi a tempo, tornerò in tutti i modi a servir cotesti SS.ri, con che la reverisco e le bacio le mani.

Ser. suo

E. Torricelli.

---

(1) *Le opere* di Galileo Galilei. Edizione Nazionale, ecc. Vol. XVIII, p. 361.

(2) Per queste relazioni fra il Torricelli ed il Viviani, cfr. Antonio Favaro, *Amici e corrispondenti di Galileo Galilei. XXIX*, Vincenzio Viviani (*Atti del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti.* Tomo LXXII. Parte seconda) Venezia, premiate officine grafiche Carlo Ferrari, 1912, pag. 24-29.

(3) Biblioteca Nazionale di Firenze. Mss. Galileiani. *Discepoli*, Tomo, CXLVII, car. 232*r*.

Digitized by Google

Riproduciamo senz'altro qui appresso la seconda delle suaccennate lettere, conservataci tra le minute di quelle del Viviani (1) prive di data:

« Al Sig. Evangelista Torricelli.

Molto Ill.re Sig.re et Padrone Col.mo

Vuole la mia mala fortuna che quando è tempo di ricever grazie e favori dal Sig.re Evangelista mio Sig.re, egli si trovi fuori di Firenze et io ancora, acciò al suo ritorno non possa pregarlo personalmente di quanto la supplico per questa.

Il Prete Carlo Mariotti che dava lezzione di matematica a' Sig.ri Paggi ha domandato et ottenuto licenzia dal Ser. G. Duca, onde fattone avvisato dal Sig. Andrea Arrighetti, (2) quale ha procurato sempre ogni mio avanzamento, et al quale, come sa V. S., devo perpetue obligazioni, mi risolsi per consiglio del medesimo Signore di rappresentarmi davanti a S. A. e supplicarla a compiacersi di far reflessione sopra la persona mia et informarsi se io poteva esser sufficiente per tal carica, allegando e V. S., e il d.o Sig.re Andrea, come quelli da' quali haverebbe potuto ottenere intera notizia, e venendo approvato per idoneo dalle Signorie Loro supplicai la medesima Altezza a volermene consolare: mi rispose che io ne fusse col Marchese Salviati (3), e che se ne sarebbe ricordato, et al nominar che feci di V. S. mi domandò subito quand'ella tornava.

Trovai il Sig.re Marchese, quale, oltre al dirmi che havea notitia della mia Casa et al mostrar di compatirla, risposemi che ne sarebbe stato con il Gran Duca per sentire quello comandasse: questo è il seguito. Sig. Evangelista, io so assolutamente che dall'informatione di V. S. e del Sig. Andrea depende la resoluzione di tal negozio; del favor di questo Signore non dubito

(1) Biblioteca Nazionale di Firenze. Mss. Galileiani. *Discepoli*, Tomo I., car. 178.

(2) Nato in Firenze di Giulio e di Maria Sernigi il 24 agosto 1592, a questo tempo era già Senatore. Molto probabilmente le sue relazioni col Viviani ebbero origine, oltre che dalla comune intimità con Galileo, dall'ufficio che egli teneva di Soprintendente di tutte le fortezze e fabbriche dello Stato Toscano.

(3) È questi l'Abate Salviati, al quale il Viviani, già vecchio, indirizzò la ben nota lettera autobiografica. Cfr. *Lettere inedite di uomini illustri*. Tomo secondo. In Firenze, MDCCLXXV, nella stamperia di Francesco Moücke, pag. 4-24.

Digitized by Google

punto, resta che V. S. si compiaccia nel trovarsi ad aures di far per me quell'offizio ch'io desidero, e ch'io mi prometto da i segni di benevolenza e di affetto che ha V. S. esercitato verso di me; so che in me non può conoscer merito tale che mi porti a conseguire questa carica, ma gli sarà lecito in parte di farvelo apparire, mentre voglia haver riguardo allo infelice stato in ch'io mi trovo, senza padre e senza patrimonio, con cinque sorelle in casa oltre al resto della famiglia.

Il Sig. Dott. Serenai (1), nostro comune Amico e mio singolarissimo Padrone, supplirà per me in voce a quello che haverei in animo di esplicarli in scritto, non havendo stasera un pò di tempo, dovendo domattina di buonissima ora partire per Monte Pulciano. Solo gli soggiugnerò che in lei spero, in lei confido, e che volendo non mi può mancare questo impiego per la stima che fa il Ser. Padrone del suo valore e per il capitale che è per fare assolutamente del parere di V. S. „

Il solo elemento dal quale potrebbe dedursi la data di questa lettera sarebbe rappresentato dal tempo nel quale il Prete Carlo Mariotti cessò dall'impartire lezioni di matematica ai Paggi del Granduca, ma i documenti dell'Archivio di Stato di Firenze non conservano a tale proposito alcuna memoria. Infatti il Registro dei provvisionati degli anni 1641 e 1642, appartente all'Archivio della R. Depositeria, contiene a car. 109 la seguente indicazione: „ Prete Carlo Mariotti, avere per sua provvisione dal 28 settembre 1641 al 6 settembre 1642, scudi 72 „, senza che sia detto per quale ufficio tale retribuzione gli fosse corrisposta. E nel registro successivo che giunse insino a noi, e che incomincia dal gennaio 1648 e va fino all'agosto 1649, trovasi ancora impostato il predetto Mariotti a car. 169 sotto la data 30 agosto 1649, per una provvisione di 18 scudi, senza che nemmeno qui sia detto a che titolo essa gli veniva corrisposta.

Non doveva però certamente esser quella d'insegnante di matematica ai Paggi, perchè a questo tempo il Torricelli era già morto, e quindi non poteva il Viviani rivolgersi a lui ed interporre la sua mediazione per ottenere di succedergli. E nemmeno è nota la data alla quale il Viviani fu, come d'altra parte sappiamo, eletto all'ufficio di cui in questa lettera manifesta il de-

(1) Lodovico Serenai, le cui fraterne relazioni col Torricelli sono ben note.

Digitized by Google

siderio; molti anni innanzi ad ogni modo della prima menzione che se ne trova nel più antico registro conservatoci dopo i due suaccennati, e che incomincia con l'anno 1656.

Anche della seconda lettera quindi non può essere in alcun modo precisata la data, e tutto al più possiamo presumere ch'essa non abbia preceduto di molto la morte del Torricelli.

Opere complete e Enciclopedie.

PAUL TANNERY, *Memoires scientifiques publiés par* J. L. HEIBERG *et* H. G. ZEUTHEN I, *Sciences exactes dans l'Antiquitè;* 1876-1884 T. I. Paris, Gauthier-Villars, 1912, 8°, p. XIX-465.

Nella III edizione del T. I. della grande opera di Moritz Cantor *Vorlesungen über Geshichte der Mathematik* si trovano non meno di 38 esplicite citazioni di lavori di Paul Tannery, come risulta dall'Indice; in un recente lavoro di chi scrive sulla storia dell'antica astronomia greca sino ad Aristarco di Samo ve ne sono 61; e nei volumi della *Bibliotheca mathematica* pubblicati a partire dal 1900 ve ne sono in media da 20 a 30 per volume. Tali cifre, relative a pubblicazioni su vari soggetti di matematica pura ed astronomia, possono servire come misure approssimative delle infinite benemerenze che l'illustre storico francese si è acquistato di fronte a tutti coloro i cui lavori appartengono al dominio della storia delle matematiche.

Paul Tannery era un uomo di attività eccezionale e di un sapere pressochè enciclopedico. L'elenco degli argomenti da lui toccati comprende: matematica, filosofia, archeologia, filologia classica, mentre la storia delle scienze era il tema suo prediletto. Sino ad oggi s'incontrava molta difficoltà a rendersi conto completamente delle sue svariate ricerche, perchè le sue memorie erano per la massima parte disperse qua e là in giornali che non sono di regola accessibili ai cultori di materie affini, i quali non si trovano in immediato contatto con qualche grande biblioteca. È vero che la sostanza di alcuni fra tali articoli venne incorporata nei volumi: *Pour l'histoire de la science hellène de Thalès à Empédocle* (1887), *La géométrie grecque* (1887), *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne* (1893), per tacere della edizione del testo greco di Diofanto (nella Collezione Teubneriana) e dei suoi contributi alle grandi edizioni delle *Opere* di Fermat e De-

Digitized by Google

scartes; ma resta sempre nelle sue memorie una somma enorme di importanti notizie storiche e critiche, assolutamente indispensabile a qualunque studioso serio.

Il numero di tali memorie venne valutato da Jules Tannery, fratello dell'estinto, a non meno di 400. Esse constano in parte di ricerche originali ed in parte da recensioni; ma queste possiedono largamente il carattere di quelle, perchè era abitudine del Tannery, quando rendeva conto di un lavoro storico o critico, di cogliere l'occasione che gli si offriva per esporre le proprie vedute o sull'argomento di quel lavoro o sopra argomenti analoghi.

Ecco un elenco dei periodici ove apparvero gli articoli in questione: *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, *Annales de la Faculté des Lettres de Bordeaux*, *Revue philosophique*, *Archiv für Geschichte der Philosophie*, *Revue archéologique*, *Bibliotheca mathematica*, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, *Bulletin des sciences mathématiques*, *Comptes-rendus de l'Académie des sciences*, *L'intermédiaire des mathématicieus*, *Revue générale des sciences pures et appliquées*, *Revue de philosophie*, *Revue des etudes grecques*, *Revue critique*, *Revue de philosophie*, *Notices et Extraits des Manuscrits de la Bibliothèque Nationale*, *Annales de la philosophie chrétienne*, *Archives des missions*, *Journal des Savants;* mentre vi sono molti articoli di lui nella *Grande Encyclopédie.*

Nel T. VI della *Bibliotheca mathematica* (1905-06, p. 257-304) il prof. H. G. Zeuthen fece un ammirabile resoconto de *L'oeuvre de Paul Tannery comme historien des mathematiques*, che ebbe per risultato di far sentire ancor più il bisogno pungente di una raccolta completa di quelle memorie. Per ciò tutto il mondo dei dotti sarà grato alla signora M. Tannery ed ai professori Heiberg e Zeuthen per le fatiche spese per realizzare un voto tante volte espresso. La raccolta del materiale fu fatta dalla signora Tannery, la quale pose a disposizione degli editori anche le note che suo marito aveva fatte sulle sue copie dei propri lavori, nonchè il suo carteggio con altri dotti di ogni parte del mondo.

Il piano della pubblicazione ci sembra ammirevole. Essa escluderà gli articoli pubblicati in origine separatamente, ma poi riveduti ed incorporati in volumi; escluderà pure le piccole note della specie di " Questioni e Risposte „ pubblicate ne *L'intermédiaire des mathématiciens* e nella *Bibliotheca mathematica*. Ma

Digitized by Google

verrà fatta una scelta nelle notizie critiche e degli articoli biografici inseriti nella *Grande Encyclopédie*. Tutto il resto dell'opera del Tannery verrà inclusa e distribuita come segue in sette Sezioni:

1. Scienze esatte nell'Antichità.
2. „ „ presso i Bizantini.
3. „ „ nel Medio Evo e nei Tempi Moderni.
4. Matematiche pure.
5. Filosofia.
6. Filologia classica.
7. Recensioni.

Ogni Sezione formerà un volume, eccetto la prima che ne riempirà due, con un indice speciale ed una numerazione separata degli articoli. Un'ottava Sezione verrà aggiunta per includervi la biografia, la bibliografia ed una scelta di lettere di carattere scientifico.

In questo periodico noi dobbiamo evidentemente occuparci di preferenza delle prime quattro sezioni: è il primo volume della I Sezione che ora ci stà sott'occhio.

Tannery era un uomo dotato di qualità quasi uniche per investigare la storia della matematica greca. È straordinariamente raro che uno il quale possieda nozioni indispensabili di matematica ed astronomia, abbia pure l'altrettanto indispensabile possesso completo del Greco e del Latino, giacchè è soltanto un dotto di professione, conoscitore perfetto della filosofia greca in generale e completamente padrone dei principii di critica letteraria generalmente accettati, che è in grado di scrivere una storia adeguata della scienza greca che abbracci l'astronomia e la fisica non meno della matematica pura. Ora Tannery raccoglieva in sè stesso tutti codesti requisiti; sembra che nel momento in cui, secondo i programmi francesi ha luogo la biforcazione dell'insegnamento secondario e lo studente deve scegliere fra l'indirizzo scientifico e l'indirizzo letterario, Tannery, benchè abbracciasse il ramo scientifico che esclude il Latino ed il Greco, non abbandonasse in realtà gli studi letterari; al contrario, quando lasciò la classe di filosofia, sapeva probabilmente più di Greco e di Latino di quanto è somministrato ordinariamente dai programmi dal ramo letterario. Più tardi, a Bergerac ove andò dopo la Comune, egli utilizzò il tempo in cui stava ristabilen-

Digitized by Google

dosi da una grave malattia, per dedicarsi ad uno studio profondo delle lingue antiche e per acquistarne quella padronanza che è visibile in tutta la sua opera.

Nel momento in cui egli cominciò a scrivere le sue memorie, la storia della matematica greca, come argomento di ricerca critica e scientifica, era pressochè nuovo. Per ciò egli ebbe fortuna nello scoprire un campo di lavoro che concedeva l'esercizio di doni quasi unici; ma di tale opportunità egli fece il migliore uso; egli fu un vero pioniere in questo campo, degno di venir posto al rango dei maggiori fra coloro che mossero i primi passi per far raggiungere allo studio della matematica greca il livello al quale attualmente si trova, cioè di uomini quali Nesselmann, Moritz Cantor, Bretschneider, Hankel, Allman e Hultsch. Leggendo le memorie del Tannery non possiamo non venire colpiti dalla strordinaria acutezza del suo sguardo nello scoprire i punti più interessanti e significanti che offre la lettura degli antichi matematici. Ed invero non vi è quasi punto che presenti difficoltà o capitale importanza che non sia stato una volta o l'altra segnalato e posto pienamente in chiaro; e su quanto ha toccato egli sempre seppe proiettare nuova luce. In ciò egli fu assistito dalla notevole qualità che possedeva di pensare con la propria testa proprio come avrebbero fatto gli stessi antichi matematici; a lui era possibile di lavorare coi loro strumenti, quasi con tanta disinvoltura quanto coi metodi moderni, e le sue ricostruzioni ipotetiche del corso dei loro pensieri e della evoluzione dei loro metodi sono estremamente convincenti, perchè sono improntati allo spirito del pensiero greco.

Il volume che ci sta dinnanzi contiene 29 memorie portanti date che vanno dal 1876 al 1883. Considerando che le sue instancabili e fruttifere ricerche si seguirono senz'interruzione sino alla sua morte (27 novembre 1904) era naturale che, coll'andare del tempo, le sue opinioni subissero dei mutamenti per quanto riguarda i temi delle sue prime memorie; l'originalità che informa tutta la sua opera rendeva ciò inevitabile. Perciò i suoi scritti più antichi non contengono le conclusioni a cui egli si è poi arrestato; anzi talora le conclusioni di un articolo furono totalmente abbandonate, come è il caso per il n. 2 (*Le nombre nuptial de Platon*). Sembrerebbe anzi da articoli posteriori che egli avesse anche abbandonate l'interpretazione data nel n. 3 (*L'hypothèse geométrique du Ménon de Platon*) del passo

Digitized by Google

geometrico del *Menone* (p. 86 E-87 A), il perenne enigma che ha fatto germogliare attorno a sè un'intera letteratura; e non v'ha dubbio che saggiamente egli rinunciò alla interpretazione proposta, che certamente non è accettabile. In altri casi lo vediamo rinunziare ad un argomento già proposto come avviene nel n. 6 (*A' quelle epoque vivait Diophante?*), ove Tannery fonda un argomento per assegnare l'epoca di Diofanto sopra il prezzo del vino indicato nel problema-epigramma V. 33 dell'Aritmetica; tuttavia giova notare che la conclusione a cui egli effettivamente giunge con tal metodo (che cioè Diofanto deve porsi alla fine del III Secolo dell'E. V.) è la stessa in sostanza che viene stabilita in base a ciò che attesta una lettera di Psello; ma tali mutamenti di opinioni non tolgono agli articoli del Tannery il loro valore; essi rimangono in alto grado interessanti e suggestivi e gli editori fecero benissimo ad inserirli nella loro forma originale, corredandoli però di note che indicano o le posteriori idee dell'autore o che collegano certi passi con altri di scritti posteriori relativi ad argomenti congeneri. In altri casi vennero apportate modificazioni alle conclusioni di Tannery perchè rese necessarie dalla scoperta di nuovi documenti. Per esempio l'asserzione (n. 14) che Erone non scrisse alcun commento agli *Elementi di Euclide* deve essere ormai abbandonata, dal momento che risulta evidente dal commento arabo di Anarizio che Erone scrisse in realtà un tale commento e che questo estendevasi almeno dal I all' VIII libro. Così la spiegazione data nel n. 18 (*L'arithmétique de Grecs dans Héron d' Alexandrie*) Sez. V delle approssimazioni eroniane per le aree di tutti i poligoni regolari, dal pentagono al dodecagono, viene infirmata dalla scoperta dei *Metrica* di Erone, che danno molti particolari sopra i metodi del grande geodeta alessandrino; la stessa osservazione può ripetersi riguardo ad altre parti della descrizione fatta dal Tannery della geometria e della stereometria dello stesso; e — come disse lo Zeuthen — è assai desiderabile che qualcuno intraprenda la revisione delle ricerche del Tannery sopra Erone che sono indipendenti da quelle questioni che vennero definitivamente sciolte per la scoperta dei *Metrica*, ed applichi il nuovo materiale offerto dal testo di quell'opera nell'intento di controllare o perfezionare il resto di quelle ricerche.

Restano pochi casi in cui l'ardore della sua immaginazione spinse Tannery a proporre ipotesi speculative sopra soggetti che non

Digitized by Google

presentavano solidità sufficiente per sostenere una costruzione qualsiasi. Un esempio di ciò, se non c'inganniamo, è offerto dalla memoria n. 5 (*Sur les solutions du problème de Délos par Archytas et par Eudoxe*) ove si trova una congettura intorno alla natura della soluzione eudossiana (completamente perduta) del problema delle due medie proporzionali, mediante certe « linee incurvate ». Noi chiediamo se tale congettura si è mai raccomandata a qualcuno; per conto nostro non riusciamo a persuaderci che Eudosso siasi contentato di presentare una soluzione la quale è una semplice eco o un riflesso — una semplice trasformazione per proiezione — di quella del suo maestro Archita.

Mentre, come dicemmo, l'intera collezione ha tale valore che non avremmo voluto ne fosse soppresso alcun elemento (nemmeno la memoria ultimamente citata), ci sia lecito segnalare alcuni pochi articoli che contengono i risultati più importanti o che esercitano un'influenza più lunga e continuata sopra lo studio critico moderno della matematica greca. Nel n. 20 (*De la solution geométrique des problémes du second degré avant Euclide*) Tannery traccia la storia dell'intero argomento, a partire dalla sua origine pitagorica sino alla elaborata teoria degli irrazionali contenuta nel X libro di Euclide; e stabilisce, almeno come forte presunzione, che gli stessi metodi venissero applicati nello stesso tempo alla risoluzione delle equazioni quadratiche numeriche, quantunque sia soltanto in Diofanto che si trovi l'enunciato esplicito di equazioni siffatte. Nel n. 19 (*Sur la mésure du cercle d'Archimède*) discute le estrazioni di radici quadrate adoperate da Archimede in quel lavoro e, ancor più dettagliatamente l'approssimazione archimedea di $\sqrt{3}$. Egli segnala il legame esistente fra l'estrazione di tali radici e l'equazione impropriamente chiamata " di Pell " e, partendo da principii che esistono in operazioni effettuate da Diofanto (Lemma a VI. 15), propone una ipotesi originale e seducentissima intorno al modo in cui può essersi svolta dagli Indiani o dai Greci la risoluzione pratica di quell'equazione, nonchè le relative regole indiane. Intimamente legata con lo stesso soggetto è la Sezione IV del n. 18 (già citato) ove sono classificate e chiarite con la massima cura le varie approssimazioni per radici quadrate che si leggono in parecchie collezioni attribuite ad Erone. Altri due articoli (n. 27 *Stéréométrie de Héron d'Alexandrie*; e n. 28 *Études héroniennes*) concernono varie formole usate nelle medesime collezioni per cal-

Digitized by Google

colare il contenuto di varie figure solide o piane. Inoltre chi studia Pappo troverà una guida pure indispensabile nel n. 8 (*L'arithmétique des Grecs dans Pappus)* che tratta: 1. del frammento superstite di quel trattato di Apollonio che ha un tema simile all'*Arenario* di Archimede, cioè un procedimento per esprimere e trattare numeri grandi; 2. dell'estrazione d'una radice cubica mediante approssimazioni successive; 3. della teoria delle medie esposta da Pappo, importante perchè porge un esempio interessante di risoluzione di equazioni indeterminate di secondo grado.

Nel campo geometrico il presente volume contiene due articoli importanti: cioè il n. 4 (*Hippocrate de Chios et la quadrature des lunules*) ed il n. 25 (*Le fragment d'Eudème sur la quadrature des lunules).* Essi si riferiscono al passo famoso del *Commento* di Simplicio alla *Fisica* d'Aristotele, nel quale Simplicio parla di sterili conati per quadrare il cerchio e riproduce la pagina importante della geometria di Eudemo dedicato alla quadratura delle lunule di Ippocrate da Chio; ed è noto che Tannery contribuì, forse più di tutti, alla definitiva spiegazione di un documento dotato d'un'importanza di primo ordine.

Finalmente tre articoli concernono l'astronomia, cioè il n. 1 (*Note sur le systéme astronomique d'Eudoxe),* il n. 24 (*Seconde note sur le systéme astronomique d'Eudoxe)* ed il n. 26 (*Aristarque de Samos*). Nel n. 1 Tannery espone succintamente, col sussidio della trigonometria, la restituzione del sistema delle sfere omocentriche di Eudosso e Callippo che propose Schiaparelli; mentre nel n. 24 ribatte le critiche mosse da T. H. Martin contro molto di quanto scrisse lo Schiaparelli nel suo lavoro sopra Eudosso riguardo al sole ed alla luna. Il terzo dei citati articoli (n. 26) spiega completamente lo scopo ed il significato del trattato di Aristarco *Sopra le grandezze e le distanze del sole e della luna,* mostrando come Aristarco giunse a risultati che sono di natura essenziale trigonometrica in un'epoca in cui la trigonometria non era peranco stata inventata; nella IV parte di tale memoria Tannery discute le congeneri opinioni, sulle forme e distanze del sole e della luna, attribuite ad altri antichi astronomi.

Concludendo, noi possiamo soltanto esprimere la speranza che la preparazione degli altri volumi proceda velocemente e che il

Digitized by Google

devoto lavoro degli editori venga apprezzato e ricompensato in modo degno da parte dei matematici e da tutto il mondo dei dotti.

T. L. Heath.

Storia.

J. Carlebach, *Lewi ben Gerson als Mathematiker. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik bei den Juden.* Berlin Lamm, 1910 8° p. 238 (Prezzo Mk. 5).

Lo scienziato oggetto della presente pubblicazione venne scoperto circa vent'anni fà per un complesso di circostanze che meritano di venire ricordate. È noto che la teoria eudossiana delle sfere emocentriche ricevette un colpo mortale dalla determinazione delle posizioni e delle paralassi di comete effettuata da Regiomontano a Norimberga nel 1472. Tali notevoli osservazioni furono rese possibili in parte da uno strumento che più tardi ricevette sali a grandissima importanza per le molte applicazioni che ricevette nell' astronomia e per lo sviluppo che la nautica è ad esso debitrice; è lo strumento che, oltre altri nomi, ha pur quello comunissimo di " baculus astronomicus „ e che in opere tedesche s' incontra spessissimo sotto l' appellativo di " Jakobstab ".

Si ritenne per qualche tempo che ne fosse inventore Regiomontano, il quale ne aveva diffusa la conoscenza in Germania ed in Italia ed il cui discepolo Martin Bahaim, mercante, ne aveva insegnata l'uso ai Portoghesi. Alcune ricerche di Breusing sembrano avvalorare tale ipotesi. Contro di essa, però, sorsero a poco a poco delle obbiezioni, prodotte specialmente da ciò che del " baculus " si trovò menzione in scrittori che certamente non ebbero alcuna relazione con l' astronomo di Norimberga. Allora l'Eneström pose nella sua " Bibliotheca mathematica „ la questione se il nome " Jakobstab „ non contesse per caso un' indicazione esatta, se, cioè, quello strumento non fosse di origine ebraica. Ma lo Steinschneider rispose che questo nome proveniva dalla somiglianza di forma dello strumento in questione col bastone che, secondo la Bibbia, portava il patriarca Giacobbe; però, nello stesso tempo, egli, quasi per incidenza, fece notare la circostanza che anche un certo Levi ben Gerson aveva tro-

Digitized by Google

vato uno strumento della medesima forma e ne aveva celebrata la scoperta in versi. Così il nome di Levi ben Gerson apparve per la prima volta in un periodico matematico. Nel frattempo fu pubblicato il catalogo dei manoscritti esistenti nella biblioteca di Regiomontano e fra essi la traduzione latina di un lavoro astronomico del Levi. Questo fatto e la notizia data da Steinschneider guidarono il Günther a scoprire nella biblioteca di Monaco (Baviera) un manoscritto latino contenente la copia di un estratto di quell'opera destinata a Clemente VI; e questo condusse alla straordinaria conclusione che a Levi ben Gerson spetta la gloria della contesa scoperta. Il Günther non approfondì lo studio di quel manoscritto. Passarono altri dieci anni, scorsi i quali M. Curtze fece una indagine profonda di quel manoscritto e ne trasse una quantità di nuove notizie della massima importanza. Una trigonometria originale mostrò in Levi un pensatore capace di far progredire la matematica; un cospicuo materiale di osservazioni rivelarono in lui un maestro nel maneggio della tecnica istrumentale e un vero e proprio precursore di Copernico; si vide similmente che nella costruzione della camera oscura il Levi aveva precorso di due secoli Leonardo da Vinci e G. B. Porta. Così d'un colpo Levi ben Gerson fu posto nel gruppo dei più eminenti scienziati del Medio Evo.

Mancava però ancora, uno studio completo della sua vita e dei suoi scritti; a tale importante e desideratissimo lavoro si è accinto l'A. dell'opera che annunciamo, il quale alla nobile impresa si era da tempo preparato e aveva dato un primo saggio delle sue forze nella Dissertazione di Laurea che la Facoltà filosofica di Heidelberg, dietro relazione favorevole di M. Cantor, unanimamente approvò.

Il volume che ci sta sott'occhio consta di due parti. Nella prima l'A. narra la vita del suo eroe (nato in Provenza nel 1288 morto ad Avignone nel 1344), fermandosi a descrivere l'ambiente in cui operò ed a valutarne la cospicua produzione scientifica nel campo astronomico e nelle matematiche. Nella seconda parte egli pubblica per la prima volta in latino l'opuscolo " De numeris harmonicis „ ed inoltre un largo estratto di un'altra opera in due libri, scritta in ebraico e recente il titolo « Lavoro del calcolatore „.

Con questa pubblicazione il Carlebach ha dato un contributo importante alle nostre scarse nozioni intorno alla scienza me-

Digitized by Google

dioevale; e siccome una personalità così eminente come il Levi ben Gerson avrà indubbiamente avuti dei predecessori e dei seguaci, così è da augurare che egli continui a coltivare un campo di studi che si presenta come promettentissimo e che, sgraziatamente, annovera oggi scarsissimi cultori.

G. L.

DUNCAN M. Y. SOMMERVILLE, *Bibliography of non-euclidian geometry, encluding the theory of parallels, the fundations of geometry, and space of n dimensions.* London, Harrison e Sons 1911, 8° p. XIII-403 (Prezzo sh. 10).

Fra tutte le discipline matematiche, la geometria non-euclidea ebbe la sorte singolarmente amica; non soltanto trovò un grande numero di eminenti cultori, ma molti si occuparono di narrarne nel modo più particolareggiato la storia, di raccogliere e tradurre i più significanti lavori relativi e finalmente di redigere cataloghi ragionati degli scritti che vi riferiscono. Il primo lavoro bibliografico di tal fatta risale al 1879, è dovuto al Prof. Halsted e comprende anche la geometria a più dimensioni; non va al di là del 1830 e comprende 200 numeri. Alla sola geometria non-euclidea si riferisce la bibliografia che chiude una notissima opera di Stackel e Engel ed abbraccia 300 titoli di opere pubblicate nel periodo 1482-1837. Un piano analogo ha il congenere lavoro di R. Bonola (di cui la prima edizione apparve in queste colonne), il quale comprende 400 titoli di memorie e libri apparsi negli anni 1839-1902. Nel bel volume che annunciamo (pubblicato sotto gli auspici dell'Università di S. Andrew (Scozia)) l'A. è ritornato al piano più ampio dell'Halsted; svolgendolo ulteriormente e con ammirabile diligenza egli è riuscito a raccogliere un complesso di 4000 scritti pubblicati nei ventitre secoli interposti fra il IV a. C. ed il 1911. Naturalmente per raggiungere questa cifra, veramente imponente, egli dovette interpretare nel significato più ampio i termini « geometria non-euclidea » e « geometria a più dimensioni »; ma ciò non gli procurerà che gratitudine e plauso da parte di coloro che a lui ricorreranno per consiglio ed ajuto.

L'opera consta di tre parti. La prima abbraccia un accurato *Catalogo cronologico* dei lavori appartenenti ai detti argomenti, cominciando da alcune osservazioni fatte da Aristotele, per finire

Digitized by Google

con le *Gesammelte Abhandlungen* del Minkowski. Segue un *Indice per materie*, ordinato secondo i criteri adottati dalla Commissione preposta alla pubblicazione del " Repertoire bibliographique des sciences mathématiques „ al quale è (a comodo del lettore) premesso un estratto dell' " Index du Repertoire bibliographique „ pubblicato da quella Commissione. Chiude l'opera un *Indice degli autori* citati, nel quale, oltre al nome di ogni autore, si trovano indicate le date di nascita e, se è il caso, di morte; inoltre sotto forma compendiosa i titoli dei suoi lavori registrati nel Catalogo cronologico, con richiami che rendono possibile di ritrovare le indicazioni bibliografiche complete relative ai lavori stessi.

Che cosa si potrebbe desiderare di più? Per ciò a noi, senz'arrestarci a osservazioni minute (1), non faremo che ringraziare l'A. per la fatica che ha compiuta in modo così felice, assicurarlo della riconoscenza di tutti gli studiosi ed augurare che il suo esempio venga seguito da cultori di altri campi nei quali è difficile orientarsi per mancanza di una guida coscienziosa e sapiente quale è quella compilata dal Prof. Sommerville.

G. L.

T. Muir, *The Teery of Determinants in the historical erder of developemeni*, Vol. II, The period 1841 to 1860, London, Macmillan 1911, 8° p. XV-475, (Prezzo del vol. leg. sh. 17).

Nel render conto del primo vol. dell'opera presente (*Bollettino* T. IX, 1906, pag. 115-6) non credevamo che questa fosse destinata ad avere un seguito, ed un seguito tanto considerevole qual'è quello che oggi annunciamo, e forse non lo pensava nemmeno l'A. il quale si decise a questa nuova pubblicazione sotto la pressione dell'ingente materiale spontaneamente accumulatosi nelle sue mani e soddisfacendo così in parte il voto da noi formulato al termine del succitato resoconto. Nello scrivere questo secondo volume l'A. si è fedelmente attenuto al sistema adottato nell'architettare e scrivere il primo: egli, cioè, cercò tutti gli articoli concernenti i determinanti che vennero scritti nel terzo ventennio del Secolo XIX e fece un resoconto di ciascuno, spesso lasciando la parola al relativo autore; così risultò

(1) Alcune furono fatte da G. Enestrom. (*Bibliotheca mathematica*, 3ª Ser., T. XII, p. 85-90).

Digitized by Google

un conglomerato di materiali assai differenti, ma si evitò il pericolo che lo storico si sostituise agli autori di cui narrava le opere.

I primi due Capitoli del presente volume concernono i determinanti in generale; il primo serve di complemento al primo volume, mentre l'altro concerne il periodo a cui è dedicato il secondo. I tredici Capitoli seguenti si riferiscono invece a determinanti di forma particolare e precisamente ai determinanti simmetrici, agli alternanti, ai determinanti di determinanti, ai ricorrenti (chiamati così perchè s'incontrano in certe formole ricorrenti), ai wronskiani, ai jacobiani, ai determinanti ortogonali, ai determinanti persimmetrici, ai bigradienti (o risultanti secondo il metodo dialitico), agli hessiani, ai circolanti ed ai continuanti. Chiude l'opera un capitolo sopra alcune altre forme speciali di determinanti, dotate di importanza minore delle precedenti.

Evidentemente con questo volume l'opera del prof. Muir non è ancora finita, perchè in quest'ultimo mezzo secolo la teoria dei determinanti fu ancora coltivata con ottimi risultati; nutriamo fiducia che egli, che alla storia di quella teoria ha consacrati tutti i suoi ozi, vorrà proseguire e completare la meritoria fatica a cui si è sobbarcato, del che anticipatamente ci rallegriamo.

G. L.

H. Hahn, *Bericht über die Theorie der linearen Integralgleichungen* I Teil 8° p. 51, Leipzig und Berlin, B. G. Teubner 1911. (Prezzo Mk. 1.20)

La Società dei Matematici Tedeschi prosegue brillantemente lo svolgimento del proprio programma, promuovendo Rapporti, da persone competenti, sopra i più importanti rami della matematica. Lo prova l'opuscolo che annunciamo, il cui contenuto fa parte della collana di quei rapporti, e che presenta un interesse veramente eccezionale: infatti, toccando esso dei temi che o furono appena svolti od attendono nuovi svolgimenti, è una preziosa guida per quei giovani che intendono avventurarsi nel campo così promettente della teoria delle equazioni integrali. La I parte, che oggi annunciamo, concerne lo stadio pre-hilbertiano della teoria; nella seconda si renderà conto dei metodi aventi per fondamento la considerazione delle funzioni ad infinite variabili. Va notato che nella I parte vennero analizzati i lavori pubblicati a tutto giugno 1910.

G. L.

Digitized by Google

R. FUETER, *Die Klassenkörper der komplexen Multiplication und ihr Einfluss auf die Entwickelung der Zahlentheorie. Bericht zur Feier des 100. Geburtstages Eduard Kummer per Deutschen Mathematiker-Vereinigung.* 8° p. 47. Leipzig und Berlin, B. G, Teubner 1911 (Prezzo Mk. 1.50).

Il titolo di questo volume indica che l'origine di esso non è dissimile da quella del precedente. Non si può mai abbastanza lodare la Società matematica tedesca per avere voluto ricordare il primo centenario della nascita di Kummer con una pubblicazione nella quale è posta in luce la somma fecondità e straordinaria importanza di alcuni fra le sue idee più originali. Il presente volume prende posto naturalmente accanto ad un celebre rapporto di D. Hilbert, del quale è il proseguimento.

G. L.

M. LECAT, *Histoire de la theorie des determinants à plusieurs dimensions depuis les origines jusqu'à 1910.* Gand, Hoste 1911. 4° p. 11.

L'A. da qualche tempo ha cominciato ad occuparsi dei determinati a più dimensioni e vi ha consacrato prima un grosso volume (*Leçons sur la teorie des déterminants à n dimensions avec application à l'algèbre, à la géometrie* etc.; 1910) e poi un'opera più modesta (*Abrégé de la théorie des déterminants à n dimension avec de nombreux exercises*; 1911). Appunto come introduzione a questo lavoro funge lo scritterello che annunciamo e che va raccomandato a tutti coloro che si interessano all'argomento, non solo per la diligenza spiegata dall'autore nel raccogliere tutti i documenti relativi al suo tema, ma anche per lo spirito critico di cui egli dà prova segnalando i numerosi errori in cui incorsero coloro che si occuparono di determinanti pluridimensionali.

G. L.

D. E. SMITH *and* L. C. KARSPINSKI, *The Hindo-Arabic Numerals.* Boston and London, Ginnard Co. 1911, 8°. p. VI + 160.

Al sistema di numerazione oggi in corso in tutto il mondo civile sono collegate alcune importantissime questioni storiche: da chi fu inventato? per merito di chi venne introdotto in Europa? come si diffuse fra le varie nazioni? Su di esse l'attenzione degli

Digitized by Google

studiosi fu largamente attirata intorno alla metà del Secolo scorso ed i punti allora discussi, specialmente per merito di M. Chasles F. Woepcke, M. Cantor. Th. H. Martin, sono ancora quelli su cui l'accordo si considera tuttora come raggiunto: *quel sistema fu inventato dagli Indiani, da essi lo appresero gli Arabi, che a lor volta le insegnavano ai mercanti Europei, in particolare a Leonardo Fibonacci, il quale, avendone compresa la grande importanza teorica e pratica, si adoperò a diffonderne la conoscenza presso i propri compatrioti; non è quindi possibile, come erasi per un momento creduto, farne risalire l'origine a Pitagora.* Benchè in questo ultimo mezzo secolo, in cui gli studi sulla storia della matematica vennero coltivati con grande fervore, quelle questioni non siano state mai abbandonate; benchè le conoscenze su gli Indiani e gli Arabi siano divenute più profonde, ampie, precise; benchè i procedimenti d'indagine siano divenuti più sicuri e potenti: pure quelle conclusioni non vennero in alcun modo abbandonate, anzi vennero in generale confermate. Ciò non toglie fosse desiderabile e desiderata una completa esposizione dello stato attuale di questioni a cui non può rimanere indifferente qualunque persona colta. Incondizionata lode va, dunque, data a D. E. Smith e L. C. Karpinski di essersi accinti a tale lavoro e di averlo compiuto in base ad una conoscenza estesissima (nulla vieta di dirla completa) della vasta letteratura dell'argomento. Avendo essi incluso nel piano delle loro ricerche tutti i problemi storici collegati al tema prescelto (per es. quello celebre relativo all'autenticità della Geometria di Boezio), avendo fedelmente riprodotte le varie forme sotto cui le nostre cifre si presentano nei migliori codici esistenti ed essendosi essi arrestati a far conoscere anche i personaggi che parteciparono alle azioni descritte, a lettura finita del bel volume che annunciamo, chiunque può dire di conoscere quello che si sa e quello che si ignora intorno alle vicende di uno veicolo del pensiero che, per importanza generale, la cede soltanto di fronte all'alfabeto.

G. L.

Gaston Darboux, *Eloges académiques et discours*. Paris, A. Hermann 1912, 8°. p. 525. (Prezzo 5 fr.).

È noto che, in occasione del cinquantesimo anniversario dell'ingresso dell'insegnamento di G. Darboux, venne costituito, sotto

Digitized by Google

la presidenza di P. Appell, un comitato internazionale per rendere onoranze solenni a quell'illustre matematico; l'appello che esso rivolse ai matematici di tutto il mondo ebbe il successo che potevasi prevedere: ciò risulta dai documenti pubblicati a pag. 443-524 del volume che annunciamo, alle quali rimandiamo i lettori desiderosi di particolari al riguardo. Ma il Comitato ha saggiamente pensato che, per rendere più significante l'omaggio reso all'illustre scienziato, un mezzo eccellente si offriva, quello, cioè, di presentare raccolti i discorsi da lui pronunciati dacchè occupa la carica di segretario perpetuo dell'Accademia delle scienze, i quali, per il modo di pubblicazione finora adottata, avevano trovato un pubblico assai meno ampio di cui avrebbero meritato. Da ciò il prezioso volume che oggi annunziamo, il quale sta a provare come il grande matematico sapppia continuare degnamente le tradizioni costantemente mantenute da coloro che occuparono la stessa carica, da Fontenelle a Bertrand, attraverso a d'Alembert a Arago, per non citare che i nomi più celebri.

Siaci lecito osservare che il volume in discorso non compendia tutta la produzione oratoria del Darboux; vi manca ad esempio la Conferenza che molti in Italia ebbero il piacere di ascoltare a Roma in occasione del VI Congresso internazionale dei matematici; ad essa non mancherà certo un posto nei volumi congeneri seguenti, che auguriamo numerosissimi.

G. L.

A. Favaro, *Archimede*. 8°. picc. p. 83 Genova, A. Formiggini 1912. (Prezzo L. 1).

Col presente volumetto comincia a venire soddisfatto il voto da noi espresso (*Bollettino*, T. XIII, 1911, p. 6) che la graziosa raccolta di *Profili* contenesse cenni sopra i più eminenti culturi delle scienze esatte. Archimede appartiene indubbiamente alla piccola schiera degli eroi dello spirito umano; l'essersi occupato non solo di matematica pura, ma di tutte le più belle applicazioni di essa; l'avere rappresentato una parte importante in una delle più celebri guerre che ricordi la storia (la seconda guerra punica); l'essersi compiaciuta la leggenda a tessere intorno al suo capo gli aneddoti più piccanti, lo fanno indicatissimo per interessare il gran pubblico delle persone colte, epperò a dar

Digitized by Google

materia ad un elemento della Collezione citata. L'affinità intellettuale fra lui e Galileo, il quale seppe per primo scoprire e far fruttificare i germi esistenti nella produzione archimedea per dotare l'umanità della scienza dei moti e delle forze, designava l'illustre professore dell'Ateneo padovano come persona indicatissima a delinearne un ritratto. Ed infatti egli seppe corrispondere alle generali aspettative, riuscendo vincitore delle difficoltà che presentava il porgere a lettori non matematici un'idea adeguata di un personaggio che attribuiva il massimo valore alle sue produzioni di scienza pura. Il volume termina con un *Elenco* delle traduzioni ed edizioni di scritti archimedei, mentre la prefazione si chiude con le seguerti parole, alle quali facciamo piena adesione: "... auguriamoci non lontano il giorno in cui o se ne tragga in luce la versione (di *Archimede*) che giace dimenticata tra le carte dell'ultimo discepolo di Galileo (*V. Viviani*), o le forze riunite di un filologo e di un geometra diano all'Italia una edizione italiana di tutti gli scritti del più grande matematico dell'antichità, che pienamente soddisfi alle crescenti esigenze dei nuovi tempi „.

G. L.

I. L. Heiberg, *Naturvissenschaften und Mathematik in klassischen Altertum.* Leipzig. B. G. Teubner 1912. 8°. p. 102.

Questo volumetto, il CCCLXX della raccolta intitolata *Aus Natur und Geistesnelt,* ha lo scopo di presentare un quadro ristretto, ma completo, di quanto al popolo greco sono debitrici la matematica, le scienze naturali e la medicina. Nessuno era meglio indicato dell'Heiberg per scrivere un'opera di tal fatta, dell'Heiberg le cui edizioni di classici sono note ed ammirate in tutto il mondo; ed infatti era impossibile presentare un compendio dell'opera scientifica del popolo ellèno più profonda e lucida di quello che egli ci ha dato. Un solo minuscolo appunto ci sia permesso in vista di future edizioni: non è Fermat l'editore francese di Diofanto (p. 87) ma sibbene Bachet de Méziriac: il sommo senatore tolosano si è limitato a studiarlo a fondo e commentarlo, assurgendo così al grado di fondatore dell'odierna teoria dei numeri.

G. L.

Digitized by Google

T. L. Heath, *The " method of Archimedes „ recenthely discovered by Heiberg. A Suplement te " The works of Archimedes 1897 „* 8° p. 51. Cambridge University Press 1912 [Prezzo sh. 2, 6 d.].

La scoperta fatta nel 1906 di un importantissimo scritto di Archimede sul metodo di scoperta da lui tenuto, ha reso incompleta un'opera del Heath nota ai nostri lettori (*Bollettino*, T. II 1899, p. 13-14). A renderla completa serve il presente opuscolo, ove, dopo un'introduzione intesa a insegnare dove fu scoperto e perchè è importante quello scritto del grande Siracusano, il contenuto di questo è esposto in linguaggio moderno. Basti questa breve notizia a raccomandare alla benevola attenzione dei nostri lettori, la nuova pubblicazione dell'egregio ed indefesso erudito inglese.

G. L.

Matematica attuariale.

Hugo Broggi, *Versicherungsmathematik. Deutsche Ausgabe.* Leipzig und Berlin, B. G. Teubner 1911, 8°, p. VIII-360 (Prezzo Mk. 7; leg. Mk. 8).

Quest'opera, il cui originale è italiano (1) e che venne già tradotta in francese, si volge ad una cerchia di lettori che già conoscono il calcolo differenziale ed integrale e sono capaci d'intendere un'esposizione matematica concisa. Le sue qualità consistono nello studio approfondito dei fondamenti matematici delle assicurazioni, in quanto si trovano nella teoria della probabilità ed in quella degli errori, e nella considerazione anche dei risultati più recenti. Per conseguenza essa può venire caldamente raccomandata anche a coloro a cui la materia non è nuova; essi vi troveranno stimolo ed istruzione. Tuttavia va notato che l'opera in discorso non corrisponde completamente alle esigenze della pratica moderna. Così in Germania esistono due grandi istituti d'assicurazione, quello di Gotha e l'antico di Lipsia che hanno introdotto nei loro affari le tavole di mortalità ordinate doppiamente in base all'età ed alla durata dell'assicurazione (sono dette tavole di selezione) e qualunque nuova ricerca di mortalità

(1) Broggi, *Matematica attuariale*. Milano, U. Hoepli 1906.

Digitized by Google

fatta allo scopo di assicurazione (p. es. quella in corso di esecuzione in Germania e quella già compiuta in Austria-Ungheria) deve proporsi come problema di redigere delle tavole di selezione, perchè queste hanno nelle loro mani l'avvenire dell'assicurazione offrendo una più esatta misura della mortalità. Invece l'A. si limita (p. 153 e 154) a notizie brevi e poco chiare intorno alla tavola di selezione, senza addentrarsi nella relativa teoria e nell'applicazione che questa riceve come base di calcolo. Le *Absterbeordnungen aus Beobachtungen an österreichischen Versicherten* vennero pubblicate in quattro volumi (Wien 1907) e le *Absterbeordnungen aus Beobachtungen an österreichischen und ungarischen Versicherten* apparvero a Vienna nel 1909, onde i dati somministrati dall'A. a pag. 157 debbono venire modificati.

Insufficientemente sono trattate le spese di acquisto unite ad ogni assicurazione e le spese d'amministrazione e gestione come quantità di calcolo. Così fra l'altro la riserva di Zillmer è trattata troppo brevemente (pag. 284) e soltanto in base ad antichi lavori e non ne è posto in chiaro il significato in base al metodo dei " premi sufficienti „ dell'Altenburger (*Theorie des Policenrückkaufes*, Oesterreichische Versicherungszeitung T. XXVII, 1900) e delle notissime ricerche dell'Höckner. Quando egli afferma (p. 285) " In Prussia l'autorità tutoria non ha accettato il metodo di Zillmer „, dà una notizia antiquata, la quale, sotto quella forma è capace di indurre in errore. All'autorità prussiana, se le mie informazioni sono esatte, in seguito a disposizioni emanate dal Governo, sono soggette attualmente come imprese private soltanto due società, che non sono da ritenersi come " piccole „ nel senso del § 53 del Codice pubblicato il 12 maggio 1901. Soltanto negli atti dell'antico magistrato prussiano per le assicurazioni, prima che andasse in vigore la legge attuale, si trova affermato che ai nuovi istituti non è concessa l'applicazione del metodo di Zillmer. Similmente il valore di riscatto ed il calcolo delle riserve di guadagno, come questioni che interessano vivamente l'autorità tutoria e quindi anche le società d'assicurazione, avrebbero dovuto essere studiate più a fondo, e almeno date al riguardo notizie bibliografiche recenti. Malgrado tali critiche, fatte soltanto per mettere in guardia contro l'illusione di trovarsi in presenza di un'opera assolutamente completa, io non posso che augurare al bel libro del Broggi un grande numero di lettori ed una prossima nuova edizione.

ALFRED LOEWY.

Digitized by Google

Astronomia.

A. V. Flotow, *Einleitung in die Astronomie. Sammlung Schubert XV.* Leipzig, Göschen 1911. 8°, p. XIV-288. (Prezzo Mk. 7).

Estratto dalla Prefazione:

" L'Astronomia sferica od Astrometria forma la prima parte delle discipline astronomiche. Essa tratta della determinazione delle direzioni in cui ci appaiono i corpi celesti, e considera generalmente i fenomeni celesti come se si riflettessero sopra una sfera avente per centro l'origine delle direzioni. La trasformazione delle coordinate polari, nell'ipotesi che il raggio vettore valga 1, guida alle formole fondamentali della trigonometria sferica, base di tutte le ulteriori ricerche sopra la sfera celeste.

Il presente trattato si occupa in sostanza della parte teoretica di siffatte ricerche. La parte pratica venne lasciata in disparte, perchè, da un lato l'astronomia sferica nelle sue applicazioni geografiche è riserbata ad altro volume, mentre, da un altro lato, la teoria delle relazioni fra i sistemi di cordinate ideali e quelli fisici dati da strumenti astronomici, esce dai limiti dei trattati costituenti questa Collezione. Invece, fu necessario di occuparsi brevemente del movimento ellittico nel nostro sistema planetario, perchè esso serve di fondamento alla nostra cronologia. Perciò il contenuto di questo volume si può compendiare brevemente così: Definizione e trasformazione delle varie coordinate astronomiche, loro mutamenti relativi al variare del tempo e determinazione delle direzioni dei corpi celesti dati dalla luce. Così sono raccolti i fondamenti per lo studio ulteriore di opere astronomiche speciali, epperò sembra corrispondere allo scopo suo il titolo scelto di Introduzione „.

Indice:

1. Metodi per determinare le direzioni nello spazio. 2. I sistemi di coordinate fondamentali in Astronomia. 3. Misura del tempo. 4. Trasformazione delle coordinate. 5. Relazioni differenziali relative al triangolo sferico. 6. L'origine delle coordinate ed il problema della parallasse. 7. Gli elementi dei movimenti. 8. Realizzazione delle direzioni mediante raggi luminosi. 9. Cambiamento dei piani fondamentali. Appendice: Elementi delle trajettorie e Costanti astronomiche.

Digitized by Google

Ricreazioni matematiche.

W. W. Rouse Ball, *Ricreazioni e problemi matematici dei tempi antichi e moderni.* Versione dall'inglese di Dionisio Gambioli 8°. p. VI-398 Bologa N. Zanichelli, 1911. (Prezzo L. 10).

L'opera originale è nota ai nostri lettori avendone noi segnalata la IV edizione (v. *Bollettino*, T. VIII, 1905, p. 127). Il successo che ebbe al suo apparire ed in seguito fanno fede delle sue ottime qualità, onde va data lode al Prof. Gambioli per avere rivolta ad essa la sua infaticabile attività di traduttore. Certamente non tutti i Capitoli di essa interesseranno egualmente il lettore odierno ed in particolare il lettore italiano; ad es. oggi non si fa gran conto di una scienza sepolta quale l'astrologia ed in Italia non molti hanno a cuore le varie fasi per cui passarono le norme regolatrici di un celebre esame scolastioo inglese (che non, è come crede il traduttore, l'esame di laurea). Ma in tutti i Capitoli prettamente scientifici è sparsa tale somma di cognizioni utili che la diffusione nelle nostre biblioteche scolastiche dell'opera di Ball non potrà produrre che benefici effetti. Sopra la traduzione si potrebbe fare qualche appunto; ma non vogliamo entrare in un campo da cui qualcuno si sentirebbe forse tentato di cacciarci, ripetendo una celebre frase di Apelle. In Appendice il Prof. Gambioli ha opportunamente riportate alcuni passi di un recente Discorso inaugurale del Prof. Corbino.

G. L.

Analisi infinitesimale.

G. Fubini, *Lezioni di Analisi Matematica.* Società Tipografica Editrice (S. T. E. N.) 8° gr. p. 535. (Prezzo L. 14).

Nelle Università Italiane esistono i due corsi di Algebra e di Calcolo: ora per ragioni, in parte intrinseche ed in parte estrinseche, si tende a riunirli in un solo corso di Analisi Matematica. Tale riforma è già stata adottata nel Politecnico di Torino da varii anni ed il prof. Fubini ci presenta in questo volume il corso che sotto tale titolo egli svolge in quell' Istituto.

Premessi alcuni cenni riassuntivi sugli irrazionali e sui principii della geometria analitica, l'autore espone, seguendo i metodi

Digitized by Google

ordinarii, l'analisi combinatoria, la teoria dei determinanti e dei sistemi di equazioni lineari. Riprende poi i fondamenti colle teorie dei limiti, delle serie, e le prime nozioni sulla continuità delle funzioni, per esporre compiutamente la teoria delle derivate delle funzioni di una variabile e le sue prime applicazioni: in questi capitoli appare un breve cenno all'integrazione come operazione inversa della derivazione. Seguono alcuni capitoli di carattere più spiccatamente algebrico contenenti la teoria dei numeri complessi, quella delle equazioni algebriche e le applicazioni di questa alla decomposizione delle funzioni razionali in frazioni semplici, ed all'interpolazione. Dopo ciò rientriamo nelle teorie del calcolo coi teoremi di esistenza degli integrali definiti di una variabile, ed i metodi di integrazione analitica e grafica.

Seguono la teoria delle derivate e degli integrali delle funzioni di più variabili, e poi alcune nozioni sulle equazioni differenziali. Ne' penultimo capitolo sono raccolte le applicazioni geometriche che non avevano trovato posto negli esempii sparsi nei capitoli precedenti. Infine si parla degli integrali curvilinei, ed in una appendice delle formule di Green e di Stokes, delle serie di Fourier, e di primissimi elementi del Calcolo delle Variazioni.

Ho voluto fare questa rapidissima rassegna degli argomenti, trattati in questo volume perchè, rappresentando esso, come dissi, un corso diverso da quelli tradizionali nei nostri insegnamenti universitarii, risultasse subito quale differenza corre tra quelli e questo, sia per il contenuto sia per l'ordine degli argomenti.

Ora, per quanto si riferisce al contenuto, esso differisce poco da quello degli ordinarii corsi di algebra e di calcolo: forti riduzioni ha subìto sopratutto la teoria della risoluzione numerica delle equazioni algebriche, che, a vero dire, nel nostro insegnamento, vera talvolta una parte troppo grande, poichè tale teoria non è densa di contenuto speculativo, nè torna in pratica di grande utilità effettiva e di facile maneggio. Per il resto l'A. ha soppresso taluni capitoli minori,; e di tale soppressione talvolta si vede chiara la ragione e tal'altra no. Così non comprendo bene perchè abbia sviluppato, sia pure brevemente, la teoria delle equazioni di 3° grado e soppresso quelle di 4°, la cui discussione è così semplice quando sia nota quella delle prime. Giustissimo invece l'avere assai ridotto l'importanza del capitolo

Digitized by Google

relativo di limiti delle espressioni di forma indeterminata, come quella che è un elegante applicazione del concetto di derivata ed occasione di interessanti esercizii, ma non ha quasi importanza teorica. Invece non si comprende perchè non si trovi cenno di asintoti; e sia stata soppressa la discussione dei massimi e dei minimi con equazioni di condizione. Perchè è ben vero che ad esempio quest'ultima non è teoria per se stante, ma semplice applicazione di teorie già note, e cioè di quella dei massimi e minimi ordinarii e di quella delle funzioni implicite; ma non è meno vero che tali problemi si presentano abbastanza sovente perchè si possa ritenere che valga la pena di enunciare esplicitamente i risultati ad essi relativi. M' affretto pero a dire che chi ben legga il volume facilmente vedrà che il Fubini non trascura tali punti, e troverà sovente, nella ricca raccolta di esercizii gli enunciati di questi teoremi complementari e di alcune loro applicazioni; talchè pare che il Fubini lasci che queste parti siano svolte nel corso parallelo di esercitazioni, e non ritenga perciò necessario richiamarle nel testo.

Ottimi sono i capitoli che il Fubini ha aggiunto, e che ho già rammentato, relativi agli integrali curvilinei e alle serie di Fourier: forse l' averli però relegati in fondo al volume ne diminuisce l'efficacia. Mi pare ad es: che specie in una trattazione elementare gli integrali curvilinei possano utilmente sussidiare lo studio degli integrali di differenziali esatti, e da questi ricevere luce e a questi darne; così pure mi pare che sarebbe bene avvicinare la serie di Fourier e la serie di Taylor in un unico capitolo destinato a lumeggiare il problema delle rappresentazione analitica delle funzioni per mezzo di limiti o di serie. Probabilmente il Fubini è stato indotto ad esporle in fondo al volume per esigenze didattiche di tempo e per non fare credere che tali teorie si richiedessero per intelligenza delle altre parti del libro.

Il Fubini ha voluto essere rigoroso e semplice e vi è perfettamente riuscito, il che non è poco; anzi questo è uno dei più bei pregi del libro. E, se ciò non stupirà chi, come lo scrivente, è persuaso che rigore è chiarezza e quindi semplicità, sarà certo stimato da chi sa pure quale assidua cura e fatica richiegga il raggiungere tale scopo. Indicare come il Fubini lo raggiunga mi è qui impossibile; poichè non risulta da questo o

Digitized by Google

quel particolare di dimostrazione o di enunciato, ma piuttosto dal tono generale dello scritto. Qui posso solo indicare dove il Fubini si scosta di più da quelle che sono le ordinarie trattazioni dei nostri corsi. Così per es.: tra le varie dimostrazioni del teorema di esistenza delle funzioni implicite ha scelto quella per approssimazioni successive del Goursat, che gli dà l'occasione di presentare questo potente metodo di risoluzione teorica e pratica di equazioni: per il cambiamento di variabili negli integrali multipli ha esposto con qualche modificazione e semplificazione una dimostrazione data da Goursat e la Vallèe-Poussin che ricorre in sostanza alla trasformazione di un integrale multiplo in un integrale curvilineo.

Particolarmente interessante è il procedimento descrittivo tenuto dal Fubini per definire l'integrale. Il Fubini definisce $\int_a^b f(x)\,dx$ come un numero $n(f(x), a, b)$ determinato dall'intervallo $(a\ b)$ e dalla funzione $f(x)$ il quale goda dalle due proprietà seguenti:

1° è $n(f(x), a, b) + n(f(x), b, c) = n(f(x), a, c)$.

2° se in $(a\ b)$ è $M \geq f(x) \geq m$, $n(f(x), a, b)$ è compreso fra $m\ (b-a)$ e $M\ (b-a)$.

Queste due proprietà, come il Fubini dimostra ricorrendo in qualche punto all'intuizione geometrica, individuano, se $f(x)$ è continua, un numero. È chiara la relazione che passa tra questa definizione e l'ordinaria Riemanniana; ma assai elegante è il modo in cui il Fubini sfrutta tale definizione e l'analoga per gli integrali multipli per mostrare che varii enti geometrici o fisici sono integrali: e più ancora per dimostrare diversi teoremi: ad es. quello della riduzione degli integrali multipli a integrazioni semplici successive. La definizione Riemanniana è in certo modo più concreta di questa; ma alcuni vantaggi notevoli che questa presenta ci consigliano di meditare alquanto su di essa.

L'autore ha tenuto sempre presente che il suo libro era diretto ad ingegneri, e non ha mancato in molti e molti luoghi di commentare i concetti matematici con applicazioni pratiche, e considerazioni intuitive. Particolarmente felici sono i paragrafi destinati al commento del modo di esposizione infinitesimale; che ormai bandito dai nostri trattati, si ritrova nei libri di Fi-

Digitized by Google

sica e di Meccanica: il Fubini fa esplicitamente la critica di tali locuzioni: e si sforza di spiegare in che senso si possano ritenere quali espressioni abbreviate di ragionamenti esatti.

Più lungo discorso si chiederebbe sulle delucidazioni intuitive. Poichè che cosa devesi intendere sotto questa parola di intuizione che così facilmente accade di pronunciare e di sentire pronunciare? Forse ciascuno di noi trova più conformi alla sua intuizione quelle affermazioni, cui le occupazioni della sua vita, e le conseguenti abitudini di pensiero rendono più facile ed immediato l'assenso. Onde è che per me, e sarà forse gusto troppo personale, non sono vere e proprie delucidazioni intuitive che quelle che, sia pure con rapidità maggiore, con qualche più larga ammissione, adombrino tuttavia la traccia del ragionamento esatto che è stabilito dalla costruzione logica perfetta: solo in tal modo col perfetto parallelismo tra la considerazione intuitiva e la formulazione analitica esatta mi pare che si possa ottenere che quella sia vero sussidio all'apprendimento di questa, e non lo conturbi invece portandovi quello che nella prima vi è necessariamente di confuso e di incerto. Ed io ritengo che le cosidette applicazioni geometriche di cui si correda ordinariamente il corso di Calcolo, abbiano appunto sopra le altre molteplici applicazioni che si potrebbero fare, quello di dare le interpretazioni più agevoli e più perfettamente parallele alle formulazioni analitiche. Ritornando al volume del Fubini, le considerazioni che egli presenta sono in generale assai limpide e chiare: tuttavia qualche volta io dissentirei da lui. Per portare qualche esempio io non credo che giovi l'imperfetta formulazione del concetto di area quale è quella di pag. 159 e ss. quando poi seguono le ben più limpide pag. 323 ss.

Ed ancora ritengo che le anticipazioni intuitive e cinematiche di pag. 197 relative al teorema del valor medio ben poco illuminino la vera essenza di questo, poichè involgono considerazioni di continuità ben più complesse di quanto non richieda il teorema; mentre proprio la dimostrazione effettiva del teorema del valor medio o dell'equivalente teorema di Rolle, si può interpretare così agevolmente, osservando che se un punto, mobile su una retta, passa due volte per una data posizione esisterà certo un istante intermedio in cui assume la distanza massima dalle posizioni medesime ed in cui quindi non può avere velocità positiva nè negativa. Ma, ripeto, si tratta qui di un argomento in cui il gusto personale ha troppa importanza.

Digitized by Google

Se, dopo questo esame del volume del Fubini, da questi singoli punti di vista, torniamo ora alle considerazioni con cui abbiamo principiato, dirò che esso viene, secondo me, ad appoggiare le tesi di chi ritiene possibile portare nel primo anno universitario, i concetti fondamentali del Calcolo. Dicono gli oppositori che l'Algebra complementare è un'ottima introduzione all'Analisi infinitesimale. Nessun dubbio; ma d'altra parte è certo che già si usa da tempo introdurre nei corsi di Algebra il concetto di limite (nè se ne potrebbe fare a meno per lo studio delle equazioni algebriche), e dato ciò, io non veggo che nulla impedisce di presentare ai giovani il concetto di derivata e quello di integrale, e di posticipare alquanto alcune teorie algebriche.

Il volume del Fubini ci presenta appunto un ordinamento ed una scelta delle materie che lo rendono accessibilissimo, e facile: altri tenterà forse altre disposizioni dei vari soggetti, altri si proverà ad escludere alcune teorie o ad introdurre concetti che ordinariamente si lasciano e che hanno preso posto nelle matematiche pure ed applicate, altri ancora si sforzerà di raggiungere una più completa fusione dei vari capitoli; ma il libro che qui abbiamo è per se stesso molto soddisfacente ed incoraggia a tentare le accennate riforme.

E. E. Levi.

W. Franz Meyer, *Differential-und Integralrechnung.* I Band, *Differentialrechnung.* (Sammlung Schubert X). II aufl. Leipzig, Göschen 1912. 8°. p. XV-441⁸. (Prezzo del vol. leg. Mk. 9).

Della I edizione di questo lavoro venne fatto un particolareggiato resoconto in questo *Bollettino* (T. V., 1902, p. 23-25). La II ne differisce soltanto in alcuni punti, che vennero modificati in gran parte dietro i consigli di recensori della I. Così venne introdotta la teoria dei massimi e minimi delle funzioni a più variabili; inoltre fu aggiunta in appendice la determinazione analitica delle tangenti alle curve piane e gobbe, che dianzi bisognava cercare nel II volume.

G. L.

E. Czuber, *Vorlesungen über Differential-und Integralrechnung.* I Bd. mit 125 Figuren im Text. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner 1913. 8°. p. XIV-605. (Prezzo del vol. leg. Mk. 12).

Digitized by Google

Delle due prime edizioni venne discorso in questo *Bollettino*, a p. 98 del T. II (1898) ed a pag. 80 del T. IX 1906). Questa terza si è arricchita da due nuove teorie, cioè quella delle trocoidi (" roulettes ") e quella delle caustiche, nonchè di un'introduzione alla teoria della superficie, con svariate applicazioni. È sottinteso che l'intera opera fu sottoposta a nuova ed accurata revisione.

G. L.

Notizie.

Le cognizioni astronomiche di Dante. Continuando i suoi geniali studi intorno agli accenni a questioni astronomiche che si trovano nella *Divina Commedia* (cfr. questo *Bollettino*, T. I, 1898, p. 76) Filippo Angelitti ha pubblicati nei Volumi VI e VII della *Rivista di astronomia e scienze affini* due estese e dottissime Note *Sugli accenni danteschi ai segni, alle costellazioni ed al moto del cielo stellato da Occidente in Oriente di un grado in cento anni*, pieni di tante elevate considerazioni di natura prettamente matematica, che ad un certo punto il commentatore esclama col proprio autore:

> Lettor, tu vedi ben com' io innalzo
> La mia materia; e però con più arte
> Non ti meravigliar s' io la rincalzo.

Se ora si riflette che il sommo poeta compendia in sè tutta la scienza dell' epoca sua, si riconoscerà agevolmente che queste ricerche possiedono grande importanza, giacchè, in ultima analisi, tendono a precisare la somma di cognizioni astronomiche che si avevano durante l' Età di Mezzo.

*
* *

Nuovi modelli pubblicati dalla casa Schilling di Lipsia. I nn. 4-19 della XL Serie contengono altrettanti modelli di " Curve piane di larghezza costante ", tali, cioè, che ammettano ∞^1 coppie di tangenti fra loro parallele ed equidistanti; ne è autore il prof. F. Schilling, che di tali curve diede un' estesa teoria nel T. 64 della *Zeitschrift für Matematik und Physik*. Ai

Digitized by Google

modelli è ammesso un piccolo strumento che serve a constatare la costanza della distanza fra due tangenti parallele di una di dette curve. Modelli e strumento sono posti in vendita al prezzo complessivo di Mk. 145. Il N. 8 della XLIII Serie rappresenta il luogo dei centri di curvatura della superficie $xyz = a^3$, secondo il modello costruito dal prof. E. Beutel, il quale di detta superficie fece uno studio accurato in una memoria pubblicata nel 1913 nelle *Math. naturwiss. Mittheilugen des mathem. Vereins in Württemberg.* Il prezzo è di Mk. 120.

Finalmente i nn. 1-5 della Serie L sono attribuiti a 5 fotografie di alcune curve tracciate da G. Küstner per suggerimento del prof. F. Klein, nell' intento di chiarire l' andamento delle funzioni rappresentate da una serie di Fourier. Prezzo complessivo Mk. 7,50.

***

Correzioni ed aggiunte alla Necrologia di M. Pieri. (Bollettino, T. XV, 1913, p. 65-74).

Correzioni :

pag. 1, linea 1 invece di *Pieve di Còmpito* leggere *S. Andrea di Còmpito*

pag. 1, linea ultima invece di (*n. 1*) leggere (*n. 2*)

pag. 2, linea 1 invece di *nel ginnasio di Livorno* leggere *nella scuola tecnica di Pisa*

Aggiunte alla lista dei lavori :

1899 - Recensione di: C. Ingrami, Elementi di Geometria (manca l'indicazione del luogo di pubblicazione).

1903 - id. di: G. Peano, Aritmetica generale ed algebra elementare. (Periodico di matematica 1903).

1904 - id. di: S. Catania, Aritmetica razionale. (Periodico di matematica 1904).

Pavia - Premiata Tipografia SUCCESSORI FRAT. FUSI.

Digitized by Google

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E STORIA
DELLE
SCIENZE MATEMATICHE
ANNO XVI, Fasc. II: **Aprile, Maggio e Giugno** 1914

Ancora sul nome " ALGORITMO „

Estratto di una lettera di ETTORE BORTOLOTTI al Direttore

Ringrazio Lei ed il sig. G. ENESTRÖM per la comunicazione dell'articolo " *Zum Verständnis des Wortes Algorismus* „ di K. HUNRATH [Bibliotheca Mathematica Neue Folge 1. (1887), N. 3, pag. 70].

Non conoscevo quell'articolo e nemmeno l' " *Opusculum de praxi numerorum quod Algorismum vocant* „ citato dall'A. ma non mi era ignoto che, nel *General Trattato di numeri e misure*, il TARTAGLIA aveva lasciato scritto:

" La Pratica Aritmetica, come afferma Giovan de Sacrobusto, " fu data compendiosa in luce da un Philosopho detto Algo, e " per questa causa la fu chiamata Argorismo over Algorithmo „ (N. TARTAGLIA *General trattato di numeri e misure* (Vinegia MDLVI) secondo libro Cap. II, carte 3).

Il quale offre una singolare somiglianza col passo: " Hanc igitur " scientiam numerandi compendiosam philosophus edidit nomine " Algorismus, unde et Algorismus nuncupat | vel ars numerandi | " vel ars introductoria in numerum „, citato dall' HUNRATH.

Ricercando poi il SACROBOSCO, ho trovato nella *Rara Mathematica* pubblicata dall' HALLIWELL (London 1841) sotto il titolo " *Jo-* " *annis de Sacrobosco tractatus de arte numerandi* „ a carte 1 della introduzione, il periodo:

" Hanc igitur scientiam numerandi compendiosam edidit phi- " losophus nomine Algus unde Algorismus nuncupatur, vel ars " numerandi vel introductio in numerum... „

E, nell'ottima rivista dell'ENESTRÖM (1) ho letto l'interessante

(1) Bibliotheca Mathematica, Neue Folge. T. 8 (1894), pp. 73-78.

Digitized by Google

nota di P. RICCARDI: " *Intorno ad alcune edizioni dell' Algoritmus del Sacrobosco* " nella quale si conclude:
" che l' *Opusculum de praxi numerorum quod Algorismum vocant*,
" stampato nel 1503 e ripubblicato nel 1510, è lo stesso, eccet-
" tuate alcune varianti, di quello pubblicato nel 1501 con il titolo
" *Algoritmus Domini* JOANNES DE SACRO-BUSCO; e di quello edito
" nel 1841 dall' HALLIWELL col titolo: JOHANNIS DE SACRO-BOSCO,
" *tractatus de Arte numerandi.*

Non diverso forse è, nella sostanza, il contenuto del manoscritto che si conserva nella biblioteca di corte di Darmstadt, col n.° 1227, nel quale, a quanto riferisce il CANTOR (1) si legge:
" Hanc scilicet scientiam numerandi compendiosam philo-
" sophus edidit nomine Algus unde Algorismus nuncupatur ut ars
" introductoria in numerorum interpretatione. "

Nel *Catalogo di manoscritti posseduti da* B. BONCOMPAGNI, *compilato da* E. NARDUCCI sono citate nove edizioni di un trattato di aritmetica di GIOVANNI DA SACROBOSCO, e non deve fare meraviglia che in un tale libro, il quale rimase manoscritto per due secoli, i copisti abbiano introdotto varianti ed abbreviazioni, fra le quali quella di *Algoritmus* in *Algo* è spiegabilissima.

* * *

L'uso della parola " *Algoritmo* " (o della equivalente *Algorismo*), come nome proprio dell'autore di una rinomata opera di pratica numerica, è frequente negli antichi.

Il CATTANEO, ne " *Le Pratiche delle due prime matematiche* ". (Venezia, M.D.LXVII, carte 7, verso) dice:
" Multiplicare un numero per un altro, *secondo Euclide* nel
" settimo, è tante volte pigliare il numero che si deve multipli-
" care quante unità sono nel multiplicante ..., et l' *Algorismo*
" *dice nel sesto capitolo*, multiplicare un numero per un altro è
" voler trovare un altro numero ... ".

Il GUGLIELMINI, nel suo *Elogio di Lionardo Pisano* (2) (p. 58 e 59) ci narra che PLATONE TIBURTINO verso il 1120 " ... vide in
" opera araba (ma d'indiana Aritmetica) le cifre indiane... e

(1) Math. Beiträge zum Kulturleben der Völker (Halle, 1863) pag. 267.

(2) Bologna 1812. V. anche. A FAVARO, *Intorno alla vita ed alle opere di Prosdocimo dei Beldomandi* [Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche, t. XII (1879)].

Digitized by Google

" giudicò *Algoritmo esserne l'Autore,* e dal tradur l'opera aste-
" nendosi per forza, volle però l'autore far noto e *collocò Algo-*
" *ritmo tra gli arabi astronomi* ...

L'indicazione di *Mohamed ben Musa Alchwarízmï*; è qui evidentissima, poichè questo autore poteva ben esser posto tra gli astronomi, per avere egli compendiato, ad uso di Al-Mamone, il *Sindo Indo maggiore* e, sulla norma di esso costruite le proprie tavole astronomiche (1); egli aveva scritto un'opera di indiana aritmetica elencata dal Casiri come: " Liber artis logisticae a
" *Mohamed ben Musa Al-Chuarezmiita* exoratus, qui caeteros om
" nes brevitate methodi ac facilitate praestat, indorumque in
" praeclarissimis inventis ingenium, et acumen, ostendit „; ed era brevemente nominato dal suo attributo *Al-Chuarezmi* successivamente trasformato in *Alkoarismi*, *Alkarismi*, *Algorismi* e finalmente *Algoritmi* ed *Algoritmo.*

" Trovo che il Cardano (avverte il Cossali nel Vol. I. p. 9,
" della sua *Origine dell'Algebra*) nel cap. V. della sua Arte magna
" dopo di avere dimostrate le due risoluzioni dell'equazione
" $x^2 + n = p\,x$ si volge al leggitore dicendogli di non meravi-
" gliarsi, se per dimostrare ambe le risoluzioni, e chiaramente e
" speditamente con una stessa figura dimostrarle, cangiata aveva
" la dimostrazione di Moamed: *Nec admireris hanc secundam*
" *demostrationem aliter, quam a Mahumede explicatam.* Con che
" ci dà manifestamente a comprendere che l'opera di Moamad
" figlio di Mosè correva per le mani degli analisti. „

E, nel libro XVI, del trattato " *De Subtilitate* „ (2) lo stesso Cardano afferma:

" *Huic Mahometus Mosis filius Arabs, Algebraticae (ut ite dicam)*
" *artis inventor succedit. Ob id inventum ab artis nomine cognomen*
" *adeptus est.* (2). „

Concorde in ciò col Tartaglia, il quale in fronte alla sesta parte del *General trattato di numeri e misure*, scrive:
" ... *nella quale si delucida quell' antica pratica speculativa del-*
" *arte magna detta in arabo Algebra ed Almucabala, over Regole*
" *della cosa trovata da Maumeth figliolo di Mosè arabo.* „

Data adunque la fama che ebbe fra gli antichi il Cuaresmita, non deve fare meraviglia se il nome di lui passò ad indi-

(1) Cossali, *Scritti inediti*, pag. 331.
(2) Basileae. Per Sebastianum Henricpetri Anno MDCXI pag. 803.

Digitized by Google

care la sua opera, ed anche il metodo ed il modo da lui introdotti e propugnati (1). Nei vari codici che ancora si conservano, troviamo esplicitamente indicata la sua persona con le frasi:

" *Mohamed ben Musa Kuarezmita*... (Cossali op. cit. T. I. pag. 178);

" Commentarius in librum *Alkuarezmita* (Cossali Id. I. pag. 230);

Alkoarizmi (Cossali Id. I. p. 231);

" Liber Maumeti filii Moysi *Alchoarismi* (Libri I. pag. 298);

" Liber Maumeti filii Moysi *Alchorismi* (2);

" Liber Maumeti filii Moysi *Algorismi* (2);

Mentre in uno stesso manoscritto si legge:

Liber Maumeti filii Moysi *Alchoarixmi*, e più innanzi: *Mohammed filius Moysi Algorismi in libro suo...* (2).

Ma, nel *Libri* (II pag. 298-299) troviamo *Liber Ysagogarum alchorismi... qui contient l'algorisme*;

e più oltre: *Joannis Hispalensis algorismus, sive practica arithmetica.* La bibliothéque royale en possède deux exemplaires... le volume dont nous parlons ne porte que *editus... a magistro Johe.*

E nel Cossali " *Liber Ysagogarum alchoarismi ad totum quadrivium*,... che contiene le numeriche figure o *regole dell'indiano algorismo.* "

Mentre lo Chasles (3) dice che quei due trattati di aritmetica sono annunciati dai loro Autori come il Sistema dell'*Aritmetica di Alchorismi* e cioè:

- Incipit Liber Ysagozarum *Alchorismi* in artem astronomicam a magisto A. compositur.

- Incipit Prologus in Libro *Alcorismi* arithmeticae qui editus est a magistro Johanne.

Dunque il nome *Alcorismi* poteva essere inteso, e fu inteso, in due modi: per indicare il Cuaresmita e per indicare *la regola dell'indiano algorismo.*

Tutti questi fatti suffragano la congettura del Reinaud il quale appunto fa derivare *Algoritmo* dall'attributo *Al-Kuarezmita*, col quale veniva indicato *Mohamed ben Musa*; e non mi pare

(1) Anche oggi usa così.

(2) Tolgo queste citazioni dal citato articolo di A. Favaro.

(3) C. R. Ac. des Sciences. t. 48. (1859) pag. 1060.

Digitized by Google

che la scoperta del codice, pubblicato dal Boncompagni (1), nel quale addirittura si legge: *Così parlò Algoritmi* aggiunga molti *nuovi* argomenti a favore di questa tesi.

Ma è da ricordare che, con la divulgazione per la stampa delle opere più perfette e complete dei matematici occidentali, ben presto cadde in dimenticanza l'opera ed il nome del filosofo indiano, ed alla parola *algoritmo* rimase il solo significato di *arte logistica* od *arte numerica*.

E la stessa indicazione del *filosofo* da cui tale arte, a detta del Sacrobosco, aveva preso il nome, per la sincope che ne aveva deformato il nome *Algoritmus* in *Algo*, servì piuttosto ad allontanare che a richiamare la primitiva versione, e perciò vennero le interminabili disquisizioni sulla etimologia della parola algoritmo nelle quali per più secoli gli autori si sono sbizzarriti.

Quando poi, sul principio del secolo XIX, l'opera di Mohamed ben Musa, per la poderosa analisi del Cossali, e per le pubblicazioni del Libri e del Rosen, ritornò in luce e venne rimessa in onore; quando si ricercarono gli antichi codici e se ne collezionarono le lezioni, allora fu nuovamente manifesto l'antico significato della parola *Algoritmo*.

Ed il Reinand, che per primo ha riesumato quella vecchia congettura, fonda le sue argomentazioni principalmente sulla pubblicazione del Libri che egli cita alla pag. 304 (Mémoires de l'institut National de France, Académie des inscriptions et belles lettres. T. XVIII, (1849)).

Perciò non mi parve inutile il ricordare la versione del Masieri, il quale tre anni prima che il Reinaud formasse la sua congettura, mettendo in riscontro il testo latino:

Liber Maumeti filii Moysi alchoarismi de algebra ed almucabala incipit....,

che ognuno avrebbe (in seguito alla lettura del Cossali) senza alcuna esitazione tradotto per:

Libro di Mohamed ben Musa il Cuarezmita,...

con la peculiare versione:

Libro di Maometto figlio di Mosè su l'algurismo,...

pareva proprio voler suggerire la intepretazione di *algorismo* per l'attributo *Alkuarizmita* col quale gli antichi indicavano Mohamed.

(1) *Trattati di aritmetica pubblicati da* B. Boncompagni. I. Algoritmi de numero indorum.

Digitized by Google

*
* *

Ed ôra che con tanta copia di argomenti ho cercato di persuadermi della attendibilità della interpretazione di *Algorismo* in *Al-koarismi*, cioè nel nome del matematico indiano *Mohamed ben Musa*, prendo le opere di Lionardo Pisano, conoscitore profondo e primo divulgatore della scienza arabica ed indiana, in occidente, le quali costituiscono una vera enciclopedia di tutta la scienza matematica medioevale; e, nella prima pagina del *Liber Abbaci*, leggo: *Sed hoc totum etiam et algorismum atque arcus pictagore quasi errorem computavi respectu modi indorum.*

Opere complete ed Enciclopedie.

F. Gomes Teixeira, *Obras sobre mâtematica.* Vol. IV (Coimbra 1908) e T. V. (id. 1909).

Questi due volumi delle Opere complete dell'illustre matematico portoghese (cfr. *Bollettino* T. VIII, 1905 p. 25-26 e T. XV, 1913, p. 98-101) contengono esclusivamente e completamente e tradotto in francese, quel trattato intorno alle curve speciali notevoli che noi analizzammo quando apparve per la prima volta in lingua spagnuola sotto gli auspici dell'Accademia delle Scienze di Madrid (*Bollettino* T. IX 1906, p. 84-86).

Nel preparare una nuova volta per la stampa la sua opera l'A. ne ha conservato il piano generale, ma vi ha arrecate numerose migliorie e vi ha fatte aggiunte importanti. Riguardo al primo ci è, quindi, lecito limitarci a richiamare l'Indice riferito altra volta, notando però che a partire del Cap. XII la diversità fra le due edizioni si accentua siffattamente che ci corre l'obbligo di descrivere nuovamente il contenuto degli ultimi cinque Capitoli.

XII. *Sulle cicliche sferiche.* 1. La curva di Viviani. 2. Le ciclocilindriche e le cassiniane sferiche. 3. L'ippopeda di Eudosso. 4. L'ellisse sferica. Le curve di W. Roberts. 5. Le cicliche sferiche.

XIII. *Sopra alcune curve sferiche.* 1. Lo spirale di Pappo. 2. Le clelie. 3. Le epicicloidi sferiche. 4. La lossodomia. 5. La catenaria sferica. 6. La curva del pendolo sferico.

Digitized by Google

XIV. *Le eliche. Alcune curve tracciate sopra l'elicoide gobbo.* 1. Le eliche cilindriche. Le linee di curvatura, d'ombra e di prospettiva delle elicoidi gobbe. 2. Sulle eliche coniche. Su alcune spirali del cono. 3. Le eliche cilindriche-coniche. 4. Le eliche sferiche. Le eliche biconiche.

XV. *Sopra alcune curve algebriche gobbe.* 1. Sull' oroptera. 2. L'ellisse logaritmica, l'iperbola logaritmica e la parabola logaritmica. 3. Sopra l'intersezione di due coni di rotazione ad assi paralleli. 4. Sopra le cubiche e le quartiche gobbe. 5. La curva d'Archita. 6. Sopra le curve tetraedrali simmetriche.

XVI. *Sopra varie classi di curve gobbe.* 1. Le curve a curvatura costante. 2. Le curve a torsione costante. 3. Curve di Bertrand. 4. Sopra le geodetiche e le linee di carvatura dell'ellissoide.

XVII *La poloide e l'erpoloide.*

L'opera del prof. Teixeira va specialmente consigliata a coloro che s'interessano di curve speciali *a doppia curvatura*, essendo l'unica a voi nota ove tali linee siamo completamente adunate e metodicamente investigate.

G. L.

Meccanica.

Gian Antonio Maggi. — *Dinamica Fisica.* Lezioni sulle leggi generali del movimento dei corpi naturali (Pisa, Enrico Spoerri, 1912), pp. VI + 230 (Prezzo, L. 8).

L'opera del prof. Maggi, innovatrice e ardita, nelle teorie fondamentali della meccanica, è da lungo tempo conosciuta agli studiosi. Nel 1896 egli dettava il suo trattato sulla *Teoria matematica del movimento dei corpi,* dove, inspirandosi al metodo " descrittivo „ del Mach, e riducendolo a forma più precisa, esponeva uno schema completo di meccanica su traccie completamente diverse da quelle classiche. Ora rivolgendosi a un campo di applicazioni volutamente più limitato, ci offre un saggio ulteriore del metodo, ridotto a forma più agile, e liberato da alcune difficoltà di presentazione.

Il titolo *Dinamica fisica*, a un lettore non strettamente familiare con le idee del Maggi, può suggerire qualche cosa di molto diverso da ciò che il libro contiene veramente. Nella prefazione l'Autore mette espressamemte in rilievo che si tratta soltanto di

Digitized by Google

" un capitolo „ della Meccanica, e precisamente quello che sta più in particolari rapporti con la Fisica. Traducendo nel linguaggio ordinario, il Maggi ha voluto intendere dinamica di tutte quelle forze che sono funzioni conservative della posizione dei corpi, e che soddisfano al principio di azione e reazione. Le forze non conservative, forze d'attrito, forze elettroniche nei moti rapidi, pressioni luminose, e persino anche le forze vincolari, esulano da questo quadro. Il Maggi inclina probabilmente verso l'ipotesi che tutte le forze naturali, convenientemente studiate, si dimostrino essere forze di campo del tipo classico: nel caso particolare di forze vincolari provenienti da vincoli, in realtà elastici (purchè conservativi) ma d'ordinario praticamente trattati come rigidi, questo punto di vista sarebbe giustificato; in molti altri casi l'ipotesi sarebbe grandemente arbitraria. Essa sembra quasi necessaria per chiunque abbia tale preferenza pel metodo descrittivo da voler far rientrare nell'ambito della sua portata tutta quanta la Dinamica.

Comunque sia, nel campo circoscritto di fenomeni a cui ora il Maggi limita la sua trattazione, il metodo descrittivo si applica senza gravi difficoltà. E vediamo come. Avremo in gran parte giudicato l'opera, portando un giudizio sul metodo che ne costituisce lo spirito informatore.

Riflettiamo al caso di un grave, lanciato nell'ambiente a noi circostante. In due modi è proponibile l'investigazione dele leggi del moto. Noi possiamo, lanciando ripetutamente il grave con varie velocità iniziali, osservare cronograficamente la sua traiettoria, misurare l'accelerazione ad ogni istante, e mettere in raffronto l'accelerazione con la posizione e la velocità, per verificare che essa è una certa funzione empirica, fisica, di questi due elementi. Acquisita questa cognizione e ammettendo che la forma della funzione ottenuta rimanga valida anche per le esperienze avvenire, si ha da ciò l'equazione differenziale del moto, che si applica per predirne l'andamento anche con circostanze iniziali rinnovate. E' questo il metodo descrittivo: esso si fonda essenzialmente sul postulato che l'accelerazione dipenda dalle *condizioni fisiche*; e mette in opera piuttosto l'osservazione che l'esperimento. Le determinazioni che fanno gli artiglieri sulla resistenza al moto dei proiettili, misurando la velocità in diversi istanti della traiettoria, sono un esempio di applicazione effettiva di questo metodo. Si contrappone il metodo classico, che dirò " po-

Digitized by Google

sitivo „ o " dinamometrico „. Esso consiste in quanto segue. Per mezzo di un dinamometro si esperimenta, determinando, per varie posizioni e velocità del mobile, quale è (in grandezza e direzione) la tensione dinamometrica che occorre applicare al mobile per rendere rettilineo e uniforme il suo moto, con la velocità da esperimentare. Questa tensione così misurata costituisce un vettore che si chiama *forza* e che deve figurare come nozione primitiva nella meccanica di tipo classico. La dinamica assume allora come legge generale la $\mathbf{F} = m\mathbf{j}$. Sostituendo il valore di $\mathbf{F}$ ricavato in virtù della esplorazione eseguita, ed espresso in funzione delle coordinate e della velocità, ne risulta l'equazione differenziale del moto, e se ne fa lo stesso uso come prima. Le esperienze di Eiffel per determinare la resistenza dell'aria sono un esempio di applicazione di quest'altro metodo.

Ecco dunque la differenza essenziale tra le due forme di ricerca. La meccanica di Mach, e Maggi, evita la nozione di forza, introduce direttamente l'accelerazione studiata quale si presenta in funzione delle condizioni fisiche. La meccanica classica non parla di condizioni fisiche, ma ne esprime l'effetto sostituendole con una nozione intermediaria unica, quella di forza.

Nel caso della caduta di gravi con o senza resistenza dell'aria, i due metodi si presentano ugualmente applicabili, e corrispondono a due ordini di esperienze effettivamente eseguite nelle ricerche reali. (1) Nel caso più generale, il confronto può essere fatto da diversi punti di vista.

Anzitutto, il punto di vista logico. All'antica meccanica era stato obbiettato che la nozione di forza non era abbastanza precisa. Questa critica si rivolgeva giustamente contro la trattazione newtoniana originaria: Newton parlava della forza come un concetto a sè, ma diceva di volerla misurare dalla variazione della quantità di moto; nel qual caso il successivo enunciato della legge fisica $\mathbf{F} = m\mathbf{j}$ non era più altro che una ripetizione di definizione. La scuola inglese che ha seguito Newton, esponendo

(1) Si potrebbero ancora citare come esempi contrapposti di esperienze che corrispondono ai due metodi: — la misura di g fatta una volta col pendolo un'altra volta col dinamometro (il pendolo qui è più preciso, il dinamometro è più istruttivo); — la misura della resistenza al moto dei treni che si fa, alcune volte con le esperienze di rallentamento e col pendolo di accelerazione, altre volte col carro dinamometrico (qui è più preciso il secondo metodo). Un esempio di applicazione mista è la macchina di Atwood.

Digitized by Google

la Dinamica senza previo fondamento nella Statica, ha conservato questo difetto d'origine anche nelle trattazioni moderne. In realtà quelle trattazioni sono " positive " nella forma, ma semidescrittive nella sostanza, e di fronte ad esse si comprende la reazione in favore del metodo descrittivo puro. Ma non è lo stesso quando la nozione di forza s'introduce da principio, come definita dinamometricamente. La scuola di Ampère ha iniziato la grande riforma in questo senso introducendo la limpida divisione in Cinematica, Statica e Dinamica. Nella trattazione del Reech, il concetto è stato maggiormente accentuato; e il Reech, forte della precisione ottenuta, ha potuto alludendo alla contraria scuola del Kirchhoff protestare contro " une prétendue science " mécanique, qui n'est que de la géométrie ou de la cinéma- " tique combinée avec une idée imparfaite du mot masse, et " complétée par differents hypothèses ". Mi riferisco a quanto ho scritto altrove su questo argomento (1): credo aver messo in evidenza che con una conveniente postulazione statica, e una definizione dinamometrica rigorosa, la nozione di forza può introdursi nella meccanica con ogni necessario rigore. — Di fronte alla dinamica la " forza " si presenta allora come una " nozione primitiva ", di origine e definizione sperimentale. Il metoto del Mach e Maggi la condanna all'ostracismo; e se non è giustificata per rivendicare maggior vigore, la condanna potrebbe pure esserlo a scopo di semplificazione; eliminare una notazione primitiva è sempre un progresso. Se non che, in luogo di forza. il Maggi parla di *condizione fisica*; ed è questa una nozione primitiva, che si sostituisce all'altra. Ora, se la sostituzione vuol farsi in generale, cioè per forze di qualsiasi tipo e provenienza, si va incontro all'obbiezione che " condizione fisica " è nozione non precisa, introdotta senza darne la definizione sperimentale e senza circoscriverne la portata con postulati opportuni; e nella trattazione odierna del Maggi, per quanta maggior precisione vi si riscontri in confronto a quella del Mach, questa lacuna non è stata ancora colmata, e non sembra facile a colmare. Se invece si allude solo a determinate forze posizionali o mozionali, originate da fenomeni singoli di tipo di volta in volta ben precisato,

(1) *Il problema del moto assoluto nelle fondamentali leggi della Dinamica.* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, vol. XXXIV, 1912). pp. 301-332, Cap. II.

Digitized by Google

di condizione fisica si può ottenere caso la definizione per caso introducendo in conto e studiando le variabili fisiche opportune; l'imprecisione allora scompare. È questa una giustificazione in più del titolo « dinamica fisica »; vorrebbe dire « dinamica che non può trattarsi separatamente dai capitoli singoli di fisica a cui si applica ». La nozione « forza » a cui è stato dato l'ostracismo in questa dinamica, serviva appunto per esprimere in modo uniforme e preciso, l'effetto meccanico di qualsiasi condizione fisica, mettendolo esplicitamente in evidenza come nozione primitiva.

Ed ora veniamo al punto di vista della opportunità pratica e didattica. Il confronto dei due metodi si può ridurre a questo: nello studio meccanico di una data classe di fenomeni, conviene occuparsi dell'accelerazione, mettendola in rapporto con le cause fisiche determinatrici del moto oppure introdurre il concetto intermediario di forza? Secondo me il criterio di distinzione dovrebbe essere il seguente. Quando un fenomeno è tale che sostituendo un corpo mobile ad un altro, rimane inalterata l'accelerazione, pur variando la forza motrice, la prima forma d'investigazione è preferibile. Quando invece è tale che da corpo mobile a corpo mobile varia l'accelerazione, ma resta inalterata la forza, la seconda forma è più opportuna e talvolta anche la sola possibile. Per conseguenza il metodo descrittivo è particolarmente appropriato per la meccanica dei moti dovuti a forze di massa, le quali in pratica si riducono quasi soltanto alla gravitazione, con o senza forze di Coriolis; questo campo abbraccia essenzialmente la meccanica celeste, campo quasi più cinematico che dinamico, dove si osserva e non si esperimenta, dove le forze non sono tangibili e le masse si riducono a puri rapporti astratti; e non vi è dubbio che tutti i fondatori del metodo descrittivo hanno avuto principalmente in mira la meccanica celeste. Quando alle forze di gravitazione si aggiungono forze elettiche e magnetiche, le quali sono indipendenti dalla massa ponderabile, entrambi i metodi sono applicabili, ma quello positivo è preferibile; le condizioni fisiche di un campo elettrico agente su un corpo (intensità del campo, carica del corpo) determinano sul corpo una data forza, ma non una data accelerazione. Ma nel caso più generale dove intervengano forze di ogni natura, il metodo positivo è il solo applicabile: il problema di determinare il moto di un corpo di massa conosciuta, sollecitato da

Digitized by Google

una molla la cui tensione sia stata misurata dinamometricamente non è nella meccanica descrittiva nemmeno enunciabile.

Un altro criterio che limita didatticamente l'applicabilità del metodo descrittivo è che esso non consente lo studio della Statica come scienza a sè. Nella vita pratica, la Statica ha applicazioni di gran lunga più numerose che non la Dinamica; l'ingegnere, il tecnico, il costruttore devono studiarla in modo assai più approfondito. L'ingegnere investiga la restistenza di un ponte studiando i suoi sforzi interni; questo studio è indipendente dalle leggi del moto, e darebbe gli stessi risultati anche se domani la legge $j = \frac{F}{m}$ fosse alterata in $j = \frac{F}{m(1+\alpha v^2)}$, ovvero in qualche altra consimile (meccanica minkowskiana), è dunque irrazionale subordinarlo a quello dinamico e far dipendere la definizione di forza da nozioni cinetiche.

In conclusione, pur rammaricando di non trovare nella presente *Dinamica Fisica* l'ampia trattazione che arricchiva la precedente *Teoria matematica del movimento dei corpi*, dobbiamo, credo tutti convenire nel criterio dell'Autore, quando, nel tempo stesso che ha ridotto a canone e forma più certa la meccanica descrittiva, si è distaccato delle esagerazioni dei suoi predecessori, restingendo l'applicazione del metodo a un campo opportunamente limitato, e dichiarando, come egli fa nella prefazione, che nel corso scolastico egli fa precedere la Statica " trattata con principi propri ".

E dopo queste riflessioni sull'indirizzo generale, forse anche gli avversari convinti del metodo descrittivo vorranno con qualche maggiore interesse seguire il Maggi nella modalità della sua esposizione. Cerchiamo di renderne sommariamente conto.

Nel § 1-3 il Maggi introduce le determinazioni concrete di posizione assoluta e di tempo assoluto esplicitamente mediante i riferimenti astronomici. La risoluzione specifica che egli adotta pel quesito della posizione assoluta sarebbe criticabile in un trattato di dinamica pura, ma è senza obbiezioni in un trattato di dinamica fisica, la quale oltre la teoria del moto abbraccia quella della gravitazione; gli assi Alfa che non esistono per le leggi del moto esistono invece per quelle della gravitazione, e sono appunto quelli che il Maggi adotta fino da principio. Questo procedimento preciso dell'Autore è da porre in confronto utilmente con quello troppo sommario che trovasi in molte altre

Digitized by Google

trattazioni di meccanica, ove le postulazioni sullo spazio, sul tempo, sui riferimenti sono lasciate nell'ombra.

Seguono, nei §§ successivi le proposizioni fondamentali della nuova Dinamica, ampiamente accompagnate una ad una da illustrazioni, e confronti con la meccanica classica. Credo utile presentarle qui una volta tutte riunite, riproducendole testualmente senza il corredo esplicativo. Il giudizio sulla opera del Maggi potrà ciascuno dare coi propri criteri nel miglior modo percorrendo uno dopo l'altro e meditando accuratamente questi enunciati.

Definizione 1ª: " Figura materiale " chiamiamo un mobile in movimento regolare, al quale conferiamo alcuni attribuiti, che passiamo a indicare.

Attributo 1°: La figura materiale possiede una individualità, per la quale infiniti movimenti diversi possono essere attribuiti alla stessa figura materiale. Esiste un'infinità di figure materiali, distinte per la sudetta individualità. Ogni figura materiale si può supporre isolata con una o più altre.

Definizione 2ª: " Accelerazione " di una figura materiale ad un istante chiamiamo il valore medio delle accelerazioni dei suoi punti alio stesso istante [si chiarisce poi che questa media è ottenuta per mezzo d'integrazione di volume].

Attributo 2°.

a) Le accelerazioni, ad uno stesso istante, di due figure materiali isolate l'una coll'altra, sono o ambedue nulle, o possiedono orientazioni parallele e di senso opposto, e grandezze il cui rapporto è invariabile col tempo e colla specie delle due figure, dipendendo puramente della coppia di figure materiali da esse definita.

b) L'accelerazione di una figura materiale isolata con un'altra è determinata dalla posizione della figura considerata rispetto all'altra, al supposto istante e può variare in infiniti modi, mutando la posizione relativa dell'altra figura e questa stessa figura.

Attributo 3°: Il quoziente dei rapporti delle grandezze delle accelerazioni di due figure materiali alla grandezza dell'accelerarazione di una medesima figura materiale colla quale si suppongano separatamente isolate, è eguale al rapporto corrispondente

Digitized by Google

delle accelerazioni delle due figure, quando si suppongono isolate l'una coll'altra.

Definizione 3ª " Grandezza della massa „ di una figura materiale rispetto ad una figura campione chiamiamo il rapporto della grandezza dell' accelerazione della figura campione alla grandezza dell'accelerazione della figura materiale considerata nell' ipotesi che dette due figure siano isolate l'una con l'altra: la grandezza della massa della figura campione rispetto al medesimo campione è l'unità.

Attributo 4°: L'accelerazione di una figura materiale isolata con una o più altre è la somma delle accelerazioni che le competono, a parità di posizine relativa (Attributo 2° b), quando sia isolata con ciascuna di esse.

Attributo 5°: Ogni parte di una figura materiala è una figura materiale

Definizione 4ª: " Grandezza della densità „ di una figura materiale " rispetto ad una figura campione „ chiamiamo il rapporto costante della grandezza della massa di una figura materiale, rispetto all' indicato campione, al volume della parte, o della figura rispettivamente.

Definizione 5ª: " Sistema di figure materiali „ chiamiamo ogni insieme di figure materiali, colla condizione e che i corpi che le rappresentano, ad ogni istante, non si compenetrino l'uno l'altro.

Definizione 6ª: " Grandezza della massa di un sistema di figure materiali, rispetto ad una figura campione „, chiamiamo la somma delle grandezze della massa delle singole figure materiali componenti, rispetto al'o stesso campione.

Definizione 7ª: Accelerazione di un sistema di figure " materiali „ ad un istante chiamiamo il vettore **A**, definito indicando con $\mathbf{A}_r$ l'accelerazione della figura materiale generica, allo stesso istante, da:

$$\mathbf{A} = \frac{\Sigma\, m_r \mathbf{A}_r}{m}$$

Postulato 1°: Si estendono ai corpi naturali le proprietà stabilite per le figure materiali, e pei sistemi di figure materiali, con questo che la " grandezza della densità del corpo naturale, nel punto generico di esso, al tempo generico „ per mezzo della quale si formano le espressioni della " grandezza della massa

Digitized by Google

del corpo naturale rispetto ad un corpo naturale campione „ e l' " accelerazione del corpo naturale „, al tempo generico s'intende poter rappresentare una funzione positiva, generalmente regolare, qualsivoglia, del punto: e inoltre, a determinare l'accelerazione di un corpo naturale, concepito isolato con un altro, s'intende concorrere colla posizione relativa la " condizione fisica „ (stato neutro o naturale, stato elettrico, stato magnetico, etc.)

Postulato 2°: Concepite in un corpo naturale e accumulate due o più condizioni fisiche, l'accelerazione del corpo naturale, isolato con un altro, sarà la somma dalle accelerazioni che, a parità di circostanze rimanenti, gli competono, colle singole condizioni fisiche separatamente.

Definizioue 8ª: (non testuale; riassunta dal § 33). " Massa „ di un corpo naturale è una quantità fisica scalare, invariabile per quel dato corpo, tale che la misura della massa di quel corpo rispetto ad altro qualumque assunto come campione è ugnale a quella che abbiamo chiamato " grandezza della massa del primo corpo rispetto al secondo assunto come campione „.

Definizione 9ª: " Forza motrice di un corpo naturale „, ad un dato istante, chiamiamo il prodotto della massa del corpo naturale per la sua accelerazione al corrispodente istante.

(Varie definizioni intermedie, non fondamentali, sono qui omesse e la numerazione d'ordine delle definizioni non è nel libro originale).

E su queste proposizioni occorrono alcuni chiarimenti. Ciò che l'Autore chiama " figura materiale „ significa un fittizio corpo omogeneo, sottoposto a forze di campo, posizionali etc.; l'omogeneità risulta dagli Attributi 1-5. Invece " corpo naturale „ è un corpo ordinario, sottoposto però sempre a sole forze di campo posizionali, etc.; le proprietà meccaniche di un tal corpo, generalmente inomogeneo, vengono esplicate quali proprietà limiti di un aggregato di corpi omogenei, quando le dimensioni di ciascuno tendono a zero. Nelle trattazioni ordinarie questo complesso d'idee e di passaggi viene molto perspicuamente ma anche molto abbreviatamente, espresso ricorrendo alla nozione rappresentava di " particella materiale „ (un infinitesimo attuale). Il Maggi scandisce questa nozione negli elementi logici da cui origina come chi invece di un $\varrho\, dx\, dy\, dz$ sostituisse le corrispondenti espressioni di passaggio al limite, come chi invece della formola

Digitized by Google

$m\,dv = f\,dt$ preferisce scrivere $\lim_{h=0} \frac{m\,(v_{t+h} - v_t)}{h} = f$. Il rigore è lo stesso, perchè in sostanza si tratta delle medesime idee espresse una volta simbolicamenle, una volta per esteso. Dal punto di vista didattico, si può osservare che il calcolo infinitesimale si insegna apposta per dare un simbolismo perspicuo e conciso da sostituire alle ingombranti espressioni dei passaggi al limite; l'uso degli infinitesimi attuali non è purtroppo incluso nei programmi di molti odierni corsi di calcolo, ma vi è insegnato indirettamente; e la legittimità di esso è posta fuori dubbio dalle moderne ricerche, alcune delle quali compiute anche sotto gli auspici del principe dei logici rigoristi, del prof. Peano. Ma per chi già conosca la meccanica e quindi non incontri ostacolo nella complessità e nella forma astratta degli enunciati, il trovare analizzati nell'opera del Maggi tutte le idee e deduzini, anche di dominio del calcolo, che concorrono a costituire i fondamenti della meccanica non può che riuscire sommamente interessante.

GIOVANNI GIORGI

(Continua)

A. G. WEBSTER, *The dynamics of particles and of rigid, elastic, and fluid bodies, being lectures on mathematical physics.* Second edition, 8° p. XII-588. Leipzig B. G. Teubner, 1912. [Prezzo del vol. leg. Mk. 12].

È l'XI Volume della nota *Teubners Sammlug von Lehrbücher auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften;* alla presente edizione è premessa la seguente dichiarazione:

" L'inatteso successo che ebbe la I edizione della presente opera, dimostrato dal suo rapido esaurimento e della buona accoglienza che ricevette sulle due rive dell'Oceano ha reso necessaria la preparazione di una nuova. Questa è sostanzialmente identica alla prima col solo divario che vennero corretti alcuni errori cortesemente indicati da amici. Sgraziatamente mi è mancato il tempo per riscrivere od aggiungere alcune sezioni, nè mi fu possibile di trattare adeguatamente certe nuove applicazioni del giroscopio, le quali vennero semplicemente segnalate. Così spero verranno perdonati gli eventuali errori di stampa ".

Digitized by Google

Calcolo infinitesimale.

Z. G. DE GALDEANO, *Los programas de mis cursos de cálculo infinitesimal. Lo que son y lo que debian ser.* Zaragoza, Casanal, 1910, 8° p. 32.

Id. *Algunos conceptos fundamentales en un curso de análisis matemático y de las funciones.* Zaragoza, Casanal, 1911, 8° p. XII + 76.

Id. *Ensayos de síntesis matemática y nuevo metodo de ensenanza matemática.* P. I. Zaragoza, Casanal, 1911, 8° p. 96.

Id. *Nuevo método de ensenanza matemática.* Zaragoza, Casanal, 1912, 8° p. XXIV + 56.

Id. *Sumario de mis cursos de cálculo infinitesimal con arreglo al nuevo método de ensenanza* (1912 a 1914). Zaragoza, Casanal, 1913, 8° p. 192.

Ecco altre cinque opere che il dotto professore dell'Università di Saragozza aggiunge alle molte già pubblicate.

Nella prima: *Los programas* etc., premesse alcune considerazioni sullo stato attuale dell'analisi, l'autore espone il programma di un suo corso biennale di calcolo infinitesimale (115 lezioni). La prima parte comprende il contenuto ordinario dei corsi di calcolo, più alcune lezioni sulle differenze finite, sulle funzioni di variabili complesse e sulla teoria delle probabilità, e numerosi esempi scelti opportunamente nel campo delle matematiche applicate. La seconda parte abbraccia tutte le più importanti teorie dell'analisi moderna: gruppi finiti, geometria numerativa, rappresentazione conforme, funzioni poliedriche e modulari, aggregati di punti, funzioni di variabili reali, funzioni analitiche, serie trigonometriche, integrali abeliani, teoremi d'esistenza per gli integrali delle equazioni differenziali, equazioni di Monge e Ampère, sistemi completi, trasformazioni di contatto, superficie di Riemann, punti singolari delle equazioni differenziali funzioni, ipergeometriche, gruppi di trasformazioni, invarianti differenziali. La soverchia densità di questo programma non isfugge all'autore, il quale la giustifica colla necessità di supplire alle deficienze degli ordinamenti scolastici tuttora vigenti nel suo paese.

L'opera: *Algunos conceptos* etc. è una rapida rassegna del contenuto dell'analisi moderna fatta dal punto di vista della classificazione delle idee.

Digitized by Google

Nella parte prima degli *Ensayos* etc., la sola finora pubblicata l'autore incomincia un largo riassunto della propria produzione scientifica, trattando: 1) delle opere dottrinali; 2) delle opere di propaganda critico-matematica.

Il *Nuevo método* etc. contiene come preliminari un cenno sulle opere dell'autore raggruppate logicamente, e la riproduzione di due comunicazioni da esso fatte al Congresso internazionale di matematica di Parigi ed a quello di filosofia di Bologna. Segue poi il progetto ragionato di un corso completo di insegnamento matematico, secondo i concetti già più volte esposti dal Galdeano. Accanto a questo insegnamento, che potrebbe dirsi ufficiale, egli aveva iniziato un corso libero di " divulgazione matematica „, trattando in quattro lezioni dei vari periodi storici della matematica, dei metodi, dei concetti, dei rapporti della scienza pura colle applicazioni; in seguito avrebbe parlato delle astrazioni e dello schematismo, della logica matematica, della metodologia, ed infine del suo " nuovo metodo „. A questo nuovo metodo, che egli chiama psicologico, in opposizione al metodo logico, e che dovrebbe, per dirla in due parole, proporsi uno scopo eminentemente *formativo*, anzichè *informativo*, egli dedica le ultime pagine del suo libro. In questa occasione egli enumera le cause che si oppongono al progresso della matematica in Ispagna: predominio delle scienze applicate, indifferenza del pubblico, tendenza alla burocrazia, dogmatismo eccessivo, protezione esagerata per ciò che appartiene al passato.

In forma assai più vivace il nostro autore riprende lo stesso argomento nella prefazione al *Sumario* etc., la quale offre un quadro, che sarebbe umoristico se non fosse doloroso, delle condizioni presenti della matematica spagnuola, rappresentata da quadratori, trisettori, dimostratori del postulato d'Euclide, scopritori del movimento perpetuo, autori di trattati d'aritmetica e di geometria in versi! L'opera contiene: un largo riassunto d'un corso libero di 10 lezioni, il programma dei due corsi di calcolo per il 1913-14 con un esteso commento, una rassegna delle principali teorie moderne (funzioni analitiche, gruppi continui, calcolo funzionale, calcolo delle variazioni, funzioni ellittiche, serie intere, continuità, integrabilità, equazioni differenziali) alcune pagine sul " nuovo metodo „, un cenno sugli scopi dell'opera, finalmente un'autobiografia dell'autore, che è la storia dolorosa del disconoscimento della sua lunga opera d'importanzione e dif-

Digitized by Google

fusione scientifica da parte dei suoi compatrioti. A noi non è lecito entrare in questioni, delle quali non conosciamo esattamente i termini; ma crediamo che nessuno possa negare un tributo d'ammirazione all'infaticabile professore Galdeano per l'apostolato che esercita da ben quarant'anni con rara tenacia a pro del risorgimento scientifico del suo paese.

G. Vivanti

Teoria delle funzioni

W. F. Osgood, *Lehrbuch der Funktionentheorie.* Erster Band. Zweite Auflage. Leipzig und Berlin, Teubner, 1912: 8°, p. XII, + 766. Prezzo del vol. leg. Mk. 18.

Di quest'opera abbiamo già parlato abbastanza a lungo (*Boll.* T. IX, 190, p. 116-117; T. X, 1908, p. 96-97). Le modificazioni e le aggiunte che presenta la nuova edizione sono numerose ed interessanti, ma non di grande importanza; citiamo il teorema di Borel (p. 46), un esempio di serie non convergente uniformemente in alcun intervallo (p. 87), un teorema sulle serie uniformemente convergenti (p. 95), lo studio degli integrali contenenti un parametro da cui dipendono anche i limiti (p. 110, 113), l'interpretazione delle trasformazioni lineari come rotazioni d'una sfera (p. 270), la costruzione della riemanniana per la funzione i cui 6 valori sono i rapporti anarmonici d'una quaterna di punti (p. 384), la rappresentazione conforme d'un toro sopra un rettangolo (p. 420), infine un gran numero di note bibliografiche (v. p. es. p. 9, 14, 15, 26, 32, 90, 226, 319, 337, 438, 507, 600, 602, 603, 606, 620, 624, 665). La modificazione più notevole consiste in un maggiore sviluppo dell'ultimo capitolo, che è stato diviso in due, e in cui hanno trovato posto le ricerche più recenti intorno all'uniformizzazione delle funzioni analitiche.

Alcune piccole mende che esistevano nella prima edizione sono sfuggite all'accurata revisione dell'Autore. Così a p. 21 si parla della derivata, che viene definita a p. 22; a p. 44 si trova la parola " abzahlbar ", il cui significato viene indicato soltanto a p. 190; a p. 132 riesce oscura la frase: " musste... wenn nicht " die Existenz und Stetigkeit, so doch die Endlichkeit von P_y, Q_x verlangt werden ".

Dobbiamo anche deplorare che si continui a chiamare col nome

Digitized by Google

di Weierstrass il teorema relativo al modo di comportarsi d'una funzione nell'intorno d'un punto singolare essenziale (p. 312), anche dopo che Bertini ha rivendicato a Casorati la priorità di questo teorema.

G. VIVANTI

Gruppi finiti

J. A. DE SÉGUIER, *Théorie des groupes finis. Eléments de la théorie des groupes de substitutions.* p. X + 228. Paris, Gauthier-Villars, 1912: 8°. (Prezzo fr. 10).

Il presente volume fa seguito all'altro dello stesso autore: *Eléments de la théorie des groupes abstraits* (Paris, Gauthier-Villars, 1904; v. *Boll.*, T. VIII, 1905, p. 56-57), e ne conserva i tratti caratteristici. Esso contiene un'esposizione organica della teoria dei gruppi di sostituzioni, quale essa è oggidì per opera di Autonne, Bochert, Burnside, Dickson, Frobenius, Jordan, Maillet, Manning, Miller, Moore, Netto ed altri. La natura dell'argomento non permettendo di dare un largo riassunto dell'opera, ci limitiamo ad indicare sommariamente il contenuto dei vari capitoli.

C. 1. *Sostituzioni.* — Generalità, forma canonica e semicanonica, polinomi rappresentanti sostituzioni in un campo di Galois.

C. 2. *Gruppi di sostituzioni: teoremi generali.* — Transitività primitività, gruppo simmetrico, gruppo alternante.

C. 3. *Rappresentazione dei gruppi mediante gruppi di sostituzioni.* — Rappresentazioni di prima, seconda, terza specie. Rappresentazioni, intransitive e transitive, proprie ed improprie, primitive ed imprimitive. Gruppo aggiunto. Costruzione di gruppi più volte transitivi.

C. 4. *Gruppi di grado n e di classe $n-1$. Gruppi lineari.*

C. 4. *Gruppi di grado kp, $p+a$, $2p+a$.*

Nota 1. *Sulla teoria delle matrici.* Matrici di matrici, fasci di matrici. Estensione alle matrici della divisibilità algebrica.

Nota 2. *Equazioni algebriche.* Riducibilità, teorema di Kronecher, teoria di Galois.

Nota 3. *Sui gruppi di grado n e di classe $n-1$.*

G. VIVANTI

Digitized by Google

Logica matematica

ALESSANDRO PADOA, *La logica déductive dans sa dermiére phase développement. Avec una préface de* G. PEANO. 8°. p. 106. Paris Gauthier-Villars, 1912. (Prezzo fr. 3,25).

In questo volume sono compendiate le conferenze (escluse le due ultime) tenute dall'A. nell' Università di Ginevra nel Gennaio 1911. Siccome il piano ne venne già pubblicato in queste colonne (*Bollettino* T. XIII 1911, p. 37-44), così siamo dispensati dall'entrare in particolari intorno allo scopo propostogli ed agli argomenti svolti. Rileveremo invece lo stile lucido e brillante con cui l'A. riuscì a rendere intelligibile e piacevole una materia di sua natura arida e per molti repulsiva. Avendo innanzi a sè un pubblico di varia cultura l'A., evitò in generale di attingere alla matematica gli esempi illustrativi dei metodi generali; siaci lecito osservare che, quando si allontanò da questa linea generale di condotta, ci parve meno felice; infatti a pag. 32-33 egli esprime in formole il teorema che dice essere *qualunque intero* esprimibile come somma di quatro quadrati e subito dopo fa altrettanto per altre due proposizioni che attribuisce a Fermat e Tannery, esprimenti lo stesso fatto per *numeri di forme particolari* quasi si trattasse di cosa nuova: qualche avvertenza per impedire equivoci di interpretazione ci sarebbe parsa, meglio che utile, indispensabile.

G. L.

Matematica elementare.

P. STAECKEL und H. BECK. *Lösungen der Aufgaben aus Borel-Stäckel Elemente der Mathematik.* I Heft: *Aufgaben aus der Aritmetik und Algebra* (p. IV-44). II Heft: *Aufgaben aus der Geometrie* (p. IV-39). Leipzig und Berlin, B. G. Teubner 1913. (Prezzo Mk. 3).

Questi due fascicoletti (posti in vendita ciascuno al pezzo di Mk. 1.50), servono di complemento alla traduzione tedesca del noto *Corso di matematica* di E. Borel, che a suo tempo segnalammo ai nostri lettori (v. *Bollettino*, T. XII, 1910, p. 52 e T. XIV, 1912, p. 50); essi formano un utile complemento a quel-

Digitized by Google

l'opera, il quale verrà gradito, non soltanto da chi possiede la traduzione, ma anche da chi si serve nell'originale, perchè, oltre ai risultati, si trovano esposti suggerimenti sul modo di condursi per ottenere le soluzioni delle questioni meno agevoli. È notevole che, per dichiarazione dei traduttori, l'opera di Borel-Stäckel serve in Germania di preferenza agli " autodidatti „.

G. L.

Geometria non-euclidea

H. Liebmann. *Nichteuclidische Geometrie* (Samlung Schubert XLIX) 39 Figuren. Leipzig, Göschen 1912. 8°. p. VI-222. II neubearbeitete Auflage. (Prezzo del vol. leg. Mk. 6.50).

Le ricerche più recenti sopra gli assiomi che stanno a base della geometria, nonchè una maggiore considerazione delle fondamentali considerazioni di E. Study, hanno arrecato a quest'opera (riguardo alla I edizione v. *Bollettino*, T. VIII, 1905, p. 102-103) modificazioni notevoli in molti particolari. Inoltre anche il piano di essa ha subito qualche ritocco, come il lettore riconoscerà agevolmente paragonando l'indice della I edizione con il seguente della nuova:

I. Il postulato delle parallele ed i fondamenti della geometria. II. Geometria elementare iperbolica. III. Trigonometria iperbolica. IV. Calcolo di lunghezze, aree e volumi mediante integrali. V. La geometria analitica del piano iperbolico e la sua rappresentazione sul piano euclideo. VI. Geometria sferico-ellittica. VII. Meccanica non-euclidea.

L'esistenza nella letteratura matematica di estese bibliografie sulla geometria non-euclidea ha permesso l'A. di limitare all'indispensabile le notizie storiche sopra il soggetto trattato.

Facciamo voti che l'incoraggiante accoglienza fatta al presente scritto dal pubblico, che in sette anni ne esaurì un'intera edizione, persuaderà l'A. ad ampliare ulteriormente il piano, sicchè nella III edizione, che gli auguriamo prossima, siano trattate altre questioni concernenti il ramo di scienza a cui egli si è utilmente consacrato.

G. L.

Digitized by Google

Gli anaglifi.

H. VUIBERT, *Les anaglyphes géométriques*. 8° p. 32. Paris, Vuibert 1912.

La cagione principale per cui la geometria dello spazio riesce più difficile di quella del piano a coloro che ne intraprendono lo studio risiede negli ostacoli che offre il concepimento di figure a tre dimensioni, chè le ordinarie " figure in prospettiva „ parlano un linguaggio convenzionale che non tutti intendono. Da ciò l'idea di presentare alle scolaresche modelli in rilievo, sistema che presenta il solo inconveniente di vietare che la figura venga costruita, passo passo, sotto gli occhi degli scolari. Un altro espediente (che, d'altronde, offre lo stesso inconveniente) è suggerito dalla " projezione stereoscopica „ e la casa Underwood & Underwood si è specializzata nella costruzione di stereoscopi a buon mercato e nella confezione di figure geometriche che, con l'aiuto di quel semplice strumento, porgono una perfetta illusione del rilievo. Sopra lo stesso concetto riposa la costruzione delle nnove figure (a cui fu imposto un nome tratto dalla parola greca *ἀναγλυφή* = *oggetto cesellato* o in rilievo) che il Vuibert ha presentate al V Congresso dei Matematici (Cambridge) e di cui dà notizia il presente opuscolo. Esse furono ideate dal Richard applicando la teoria dei colori complementari, ed ecco come: le due immagini stereoscopiche di uno stesso oggetto siane delineate in uno stesso piano, una in rosso, l'altra in verde e siano guardate con un paio d'occhiali, di cui una lente sia rossa e l'altra verde; attraverso la prima passano soltanto i raggi che emanano dalla figura verde e danno di questa un'immagine nera; il contrario per l'altra; e le due figure che così nascono dànno l'illusione del rilievo, come accade per quelle viste con lo stereoscopio.

Questo procedimento è applicato con successo nell'opuscolo che annunciamo, al quale sono annesse molte belle figure e di più un pajo di occhiali a due colori; altre più numerose raccolte analoghe sono preannunziate come di prossima pubblicazione e non marcheremo di tenerne parola. Ci sia lecito osservare finendo come gli anaglifi, al pari delle projezioni stereoscopiche possono servire soltanto nell'insegnamento privato, a meno che

Digitized by Google

non si ottenga che ogni scolaro ne sia fornito; questo osserviamo per eccitare qualcuno alla ricerca di un procedimento che, forse con l'aiuto di un'apparecchio di projezione, possa essere adoperato dal maestro in presenza di un uditorio, anche numeroso.

G. L.

Didattica.

Syllabus of Mathematics, *A symposium compiled by the Committee on the Teaching of Mathematics to studens of Engineering. Accepted by the Society for promoting of Enginnering Education at the Nineteenth Annual Meeting at Pittsburg, Pa., June, 1911.* Ithaca, N. Y., 1912.

È un fatto degno del massimo interesse (e che si spiega tenendo conto delle identiche condizioni in cui si svolge la vita sociale in tutto il mondo civile) quello che i più essenziali problemi concernenti la pubblica istruzione si presentino sotto forme fra loro assai somiglianti presso tutte le nazioni che raggiunsero oggi lo stesso livello di civiltà. Ciò è ben noto riguardo alla fondamentale questione intorno ai fini ed all'indirizzo dell'istruzione media; lo è meno per l'altro problema (che le accanite lotte che si svolgono nel campo dell'industria fece assurgere al livello di questione d'interesse nazionale) di decidere se nella preparazione dei tuturi ingegneri (cioè di coloro cui è riserbato il bastone di maresciallo nelle campagne per il primato nel campo tecnico) la parte preponderante spetti alla scienza pura od alle discipline applicate, in particolare in quale limite debba essere mantenuto l'insegnamento della matematica e se esso debba atteggiarsi in modo speciale, tenendo conto della direzione in cui durante la vita, dovrà svolgersi l'attività di coloro a cui è destinato. A questi problemi a cui l'Italia rivolse la sua attenzione sin da quando (1907) la Società Italiana per il progresso delle Scienze si riunì per la prima volta a Parma, debbono essersi affacciati poco dopo anche alla grande Repubblica Americana, dal momento che essa si vide nella necessità di decidere se adottare l'indirizzo essenzialmente pratico, di cui le porgeva esempio l'Inghilterra, o se non fosse preferibile eleggere a modello la Germania, che, forse grazie al solido fondamento dottrinale dato ai propri ingegneri, è riuscita a fare alla Granbrettagna una

Digitized by Google

concorrenza terribile e spesso vittoriosa. A dirigere in tale scelta difficile e gravida di conseguenze della più alta importanza nazionale, la Sezione di Chicago della Società Americana prese l'iniziativa di un convegno a cui furono chiamate a partecipare le Sezioni A (matematica ed astronomia) e D (meccanica ed ingegneria) della Società Americana per il progresso delle Scienze, convegno e che ebbe luogo effettivamente nelle sale dell'Università di Chicago il 30 e 31 dicembre 1907. Un resoconto delle discussioni fatte e delle deliberazioni prese fu inserito nel fascicolo di marzo 1908 del *Bulletin of the American Mathematical Society* (p. 269-282); un resoconto più particolareggiato apparve in parecchi fascicoli del vol. XXVIII (1908) della rivista americana *Science* e poi anche in volumetto dal titolo *Symposium on Mathematics for Engineering Students.*

Frutto di tale discussione fu la formazione di una Commissione (nel Nuovo Mondo come nell'Antico è questa la maniera consueta per chiudere in qualche modo qualunque pubblica discussione!) destinata a tracciare, in base ai criteri più favorevolente accolti, il piano di studi per i futuri ingegneri. Essa doveva esser composta di quindici membri, ma poi si ritenne opportuno portare questi a venti, e furono scelti con criteri genialmente ecclettici, chè vennero chiamati a parteciparvi sei professori ordinari di matematica pura (fra cui l'Osgood) e due straordinari; cinque direttori di Politecnici (prendendo questa parola nel suo più ampio signficato) ed altrettanti professori di materie tecniche, e finalmente due provetti ingegneri.

In un tempo relativamente breve tale Commissione ha assolto il compito affidatole, almeno per quanto concerne la matematica, presentando un particolareggiato programma degli argomenti che un ingegnere deve avere famigliari: la Società per il progresso degli studi d'ingegneria l'approvò nel suo complesso, pur facendovi un importante aggiunta, cioè un capitolo sopra i numeri complessi e le loro applicazioni geometriche.

Un programma di studi non si può giudicare se non in seguito a ripetute applicazioni onde non è il caso di discutere a parte le proposte dei nostri colleghi americani; ma riteniamo non riuscirà discaro ai lettori del *Bollettino* il trovare qui un brevissimo indice delle questioni e dei metodi di algebra e geometria che vengono ritenuti di prima necessità per gl'ingegneri americani:

Digitized by Google

Algebra. I. Trasformazione delle espressioni algebriche. II. Risoluzione delle equazioni di I e II grado. III. Miscellanea (proporzioni, disuguaglianze, progressioni, ecc.).

Geometria elementare. (del piano e dello spazio).

Trigonometria. I. Funzioni trigonometriche di un angolo acuto II. Funzioni trigonometriche d'un angolo qualunque. III. Proprietà generali delle funzioni trigonometriche.

Geometria analitica, I. Coordinate ortogonali nel piano. II. La retta. III. Il circolo. IV. La parabola. V. L'iperbola. VI. L'ellisse. VII. Trasformazione delle coordinate. VIII. Equazione generale di secondo grado in x, y. IX. Sistemi di coniche. X. Coordinate polari. XI. Coordinate nello spazio.

Calcolo infinitesimale. Parte I^a: Funzioni ad una variabile. I. Le funzioni e la loro rappresentazione geometrica. II. Differenziazione. Variazioni delle funzioni. III. L'integrazione come operazione inversa della differenziazione. Equazioni differenziali semplici. IV. L'integrale come limite di una somma. V. Applicazioni algebriche: sviluppi in serie e forme indeterminate. VI. Applicazioni alla geometria ed alla meccanica. Parte II^a: Funzioni a due o più variabili (*in preparazione*).

Numeri complessi.

Il lettore italiano si meraviglierà di non incontrare qui alcun cenno di argomenti che si trovarono e si trovano ancora nei programmi di tutte le nostre scuole medie superiori, come i logaritmi e la risoluzione dei triangoli piani; ma sopratutto sarà colpito dalla scarsa educazione geometrica che in America s'intende dare ai futuri ingegneri: non soltanto il programma di geometria elementare è così stremenzito da apparire piuttosto uno scheletro che un corpo vivo, ma manca il più lontano cenno della Geometria descrittiva, cioè di una fra quelle discipline che Monge insegnava " pour tirer la nation française de la dependance ou elle a été jusqu'à present de l'industrie etrangère (1).

Qui arrestiamo le nostre osservazioni, non sembrandoci opportuna, agli stati degli atti, una critica di uno schema didattico non ancora attuato. Su di esso però abbiamo voluto attrarre l'attenzione di tutto coloro che s'interessano alle questioni connesse all'educazione nazionale, perchè nulla riesce più giovevole a chi tende ad uno scopo dell'esaminare tutte le vie che altri batte per conseguirlo. G. L.

(1) Sono queste le parole con cui comincia la prefazione alla *Géométrie descriptive* di Monge.

Digitized by Google

Funzioni automorfe

R. Fricke und F. Klein, *Vorlesungen über die Theorie des automorphen Funktionen.* II. Band, 1912). 8° gr. p. XXIV + 668. Leipzig., G. B. Teubner. (Prezzo Mk. 28).

Questo volume completa la lunga opera, che prendendo le mosse dalle " Vorlesungen über das Ikosaeder „ del Klein, svolge la teoria dei gruppi discontinui di trasformazioni lineari di una sola variabile e delle corrispondenti funzioni automorfe.

Il volume comincia, dimostrando coi procedimenti classici per la risoluzione del probblema di Dirichlet l'esistenza delle funzioni invarianti per un gruppo, il cui poligono fondamentale ha un numero finito di vertici, e ponendo in chiara luce i legami che intercedono tra la teoria di queste funzioni, e la teoria delle funzioni uniformi su una superficie di Riemann.

Si enunciano quindi senz'altro i probblemi fondamentali della rappresentazione conforme di una superficie di Reimann su campi fondamentali di un gruppo discontinuo: poblemi, che in una parola, potremmo chiamare i problemi di *uniformizzazione* (mi sia lecita la barbara parola) mediante funzioni aumorfe di tipo prefissato *a priori*.

E si espongono i ben noti legami tra queste ricerche e le equazioni lineari delle derivate ordinarie del secondo ordine e l'equazione di Schwarz del terzo ordine.

Il secondo capitolo tratta nel caso di gruppi di genere zero la teoria delle *forme automorfe* e dei corrispondenti sistemi di moltiplicatori. Ci si volge quindi nel Cap. III° allo studio delle serie di Poincaré, riproducendo le dimostrazioni di convergenza ed approfondendo lo studio con l'esame dei casi particolari più importanti, con speciale riguardo alle serie di dimensione (-2).

Lo studio dei punti singolari, e del comportamento nei vertici parabolici delle funzioni definite da queste serie è compiuto con grande diligenza e chiarezza; la teoria delle forme elementari e lo studio generale delle forme automorfe chiudono la prima parte del volume.

La seconda parte è dedicata ai problemi di uniformizzazione: il primo capitolo tratta col principio di continuità una lunga serie di casi particolari, e rende cosi intuitivi i teoremi gene-

Digitized by Google

rali che si danno al 2° e al 3° capitolo. Questi ultimi due capitoli costituiscono la parte più interessante di tutta l'opera; essi coordinano nel modo più semplice e perspicuo i risultati principali ottenuti dal Koebe e che ne hanno reso celebre il nome.

Nell'appendice, infine, dopo avere esposto che cosa si debba intendere per teoria della trasformazione delle funzioni automorfe, si studia con molti particolari un caso speciale: cioè quello del gruppo generato dalle trasmormaziozi

$$z' = -\frac{\bar{z}+1}{\bar{z}+1}\,; \quad z' = \frac{1+j+\sqrt{j}}{(1+j=\sqrt{j})\,\bar{z}}\,; \quad z' = -z,$$

dove z è l'immaginario coniugato della z, e la j è radice dell'equazione $j^2 + j - 1 = 0$. GUIDO FUBINI.

Equazioni integrali.

DAVID HILBERT, *Grundzüge einel algemeinen Teorie der linaeren Integralyleichungen.* 8° gr. p. XXVI + 228 Leipzig, B. G. Teubner 1912 (Prezzo Mk. 11).

Riassumere questo libro non è possibile: chè non si può in un breve resoconto riprodurre le tante idee che vi sono sviluppate e che negli ultimi anni hanno già portato a tanti risultati fondamentali in ogni ramo dell'analisi.

Questo volume riproduce le ben note " Mitheilungen „ dell'Hilbert nelle " Göttinger Nachrichten „, con alcune varianti ed aggiunte. Chi volesse rapidamente orientarsi in queste ricerche e conoscere per sommi capi il contenuto di questo libro dovrebbe scorrere le pagine IV-XXIV, dove sono riassunti nel modo più conciso e perspicuo i risultati ottenuti. E la migliore recensione consisterebbe appunto nel riprodurre queste venti facciate. Io mi accontenterò di riassumerle, sperando che così qualcuno dei lettori possa essere indotto alla lettura diretta di un'opera, che contiene i risultati più importanti che l'analisi matematica ha ottenuto nell'ultimo decennio.

Si studiano dapprima le equazioni del Fredholm col metodo del passaggio al limite, con particolare riguardo ai nuclei (Kern) simmetrici e ai corrispondenti sviluppi in serie, e con un cenno sulle equazioni a nucleo singolare, che rientrano nel tipo del

Digitized by Google

Fredholm. E si applicano questi risultati in problemi al contorno per le equazioni differenziali lineari, ed al cosidetto problema di Riemann, tanto importante per la teoria delle funzioni automorfe.

Il quarto capitolo espone la teoria così importante, che il genio di Hilbert ha creato per le funzioni di infinite variabili e in particolare per le forme quadratiche. Io ricordo soltanto che vi si trovava la teoria dello *spettro discontinuo* e dello *spettro continuo* di una tale forma: la quale teoria si può considerare tra le più profonde e più fondamentali concezioni del grande maestro di Gottinga. Di questa teoria l'Hilbert dà le applicazioni ai sistemi di infinite equazioni di primo grado con infinite incocognite, alle equazioni integrali (trattate col sussidio dello sviluppo in serie di funzioni ortogonali), alle equazioni integrali polari, dimostrando la fecondità dei risultati ottenuti per la teoria delle equazioni differenziali.

L'ultimo capitolo parla di altre applicazioni: i problemi al contorno a due parametri e il teorema di oscillazione del Klein, la teoria delle funzione cosidetta parametrica, molto analoga alla teoria della funzione compensatrice del nostro E. E. Levi, la teoria del Minkowsky sul volume misto di tre corpi convessi, infine la deduzione della formola di Maexwll-Boltzmann nella teoria dei gas d'una equazione integrale a nucleo simmetrico, la quala appare la base fondamentale di ogni, problema che detta formola assume a base delle deduzioni.

Si dirà che questa non è una recensione, ma, più che altro un indice sommario. È ben vero; ma la recensione migliore è stata scritta come dicemmo, dallo stesso Hilbert nelle citate pagine V-XXV del suo libro. A queste pagine io rinvio quindi il lettore.

GUIDO FUBINI.

Attualità.

Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians (Camdridge, 22-28 August 1912) edited by the General Secretaries of the Congress E. W. HOBSON *and* A. E. H. LOVE. 2 Vol. in 8° gr. di complessive pagine 1157. Cambringe at the University Press. 1913.

Non era ancora spirato un anno dal giorno in cui i matemamateci convenuti in Inghilterra da tutte le parti del mondo avevano lasciata l'ospitale Cambridge che uscivano per le stampe, sotto

Digitized by Google

forma severa ed elegante, gli Atti della riunione; della qual cosa va tributata la più larga lode agli organizzatori e direttori del Congresso e più che tutti ai segretari. Da questi volumi si apprende che gli intervenuti (senza calcolare i membri delle loro famiglie) furono 574 e che le conferenze generali furono 8 e 112 le comunicazioni fatte. Mentre nei Congressi precedenti furono emessi voti per la pubblicazione delle Opere di Eulero, in questo fu tributato un plauso alla Società svizzera di scienze naturali per avere attuato tale voto; mentre a Roma si era costituita una Commissione internazionale per lo studio delle questioni didattiche relative alle matematiche, a Cambridge si constatò e misurò la somma di lavoro da essa compiuto e se ne prolungarono i poteri di altri quattro anni. Altri voti emessi in precedenti Congressi vennero seppelliti dopo avere constatato che erano ormai stati abbandonati. Il prossimo Congresso verrà tenuto a Stoccolma nel 1916; pei congressi seguenti si fecero i nomi di Budapest ed Atene, senza naturalmonte, prendere nessun impegno al riguardo.

Un'analisi completa del contenuto di questi volumi è impossibile da parte nostra; ci basti osservare che nell'insieme essi possono ben reggere al paragone dei congeneri volumi precedenti ed attestano in modo indiscutibile la perenne vitalità e la crescente diffusione della nostra scienza. G. L.

Annuaire pour l'an 1914 publié par le Bureau des Longituder. Paris, Gauthier-Villars 1914 (Prezzo fr. 1.50).

In questo nuovo volume della celebre collezione le tavole relative alla fisica ed alla chimica vennero soppoposte ad una accurata revisione. Oltre alla solite rubriche, che rendono questa pubblicazione un vade-mecum indispensabile al fisico, al matematico ed all'ingegnere, si trovano nel volume che annunziamo tre notevoli articoli; uno di P. Hatt, che tratta " De la déformation des images dans les lunettes „, un altro di G. Bigourdan sopra " Le jour et ses divisions. Les fuseaux horaires et l'Association internationale l'heure „ il terzo di B. Baillaud intitolato " Notice sur la 17e Conféncence générale de l'Association géodésique internationale „. Di questi scritti il secondo è capace d'interessare, non soltanto gli specialisti, ma qualuuque persona colta, come risulta da titoli dei capitoli che le formano: I. Il giorno e le divisioni di esso. II. I fusi orari. III. Trasmissione dell'ora IV. La conferenza internazionale dell'ora. G. L.

Digitized by Google

Notizie.

TEMA POSTO A CONCORSO DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI MADRID. " Esposizione concisa di quei principî fondamentali della Nomognafia che sono stettamente necessari per giungere alla costruzione ed all'intelligenza di un sistemà di abachi e monogrammi riconosciuti sino ad ora per applicabili, con manifesti vantaggi sopra qualunque altro procedimeuto, alla risoluzione di una serie di questioni, interessanti in teoria ed utili in pratica, di pertinenza delle scienze fisico-matematiche „. Scadenza 31 Dicembre 1915.

* * *

ASSOCIATION FOR PROMOTING THE STUDY OF QUATERNIOUS AND ALLIED SYSTEMS OF MATHEMATICO. Il *Bollettino* pubblicato da questa Societa nel Giugno 1913, oltre la consueta bibliografia del calcolo vettoriale, contiene le biografie di A. Macfarlane (n. a Blairgowriein (Scozia) il 21 Aprile 1851, m. a Chatam nel Canadà il 28 Agosto 1913) che fu l'anima dell' " Association „ sin dal momento in cui venne fondato, e di G. Combebiac, che ne faceva parte sino dal 1901.

* * *

CLASSICI DELLA SCIENZA. La Società Tipognafico-Editrice Barese sotto la direzione di A. Mieli e E. Troilo ha iniziata una raccolta di volumi contenenti lavori classici relativi alle scienze (ed alla filosofia), soddisfacendo così al voto generale che alla patria nostra non mancasse più oltre una collezione analoga a quella che da tempo fu iniziata in Germania per merito dell' Ostwald. Ogni volume, stampato con cura ed eleganza, è posto in vendita al prezzo di L. 3; ma abbonandosi a 6 o 12 volumi non si devono pagare rispettivamente che L. 15 o 28. I tre volumi sinora pubblicati contengono scritti di Biringuccio, Spallanzani e Morgagni; ma altri dei seguenti saranno dedicati a lavori matematici e non mancheremo di renderne conto. Intanto auguriamo alla nobile impresa tutto il successo di cui è degna.

Digitized by Google

* * *

Isis. È questo il titolo di una nuova Rivista consacrata alla storia ed all'organizzazione della scienza, diretta da George Sarton e pubblicata a Wondelgem-lez-Gand (Belgio) sotto il patronato di un Comitato comprendente i più assidui cultori della storia delle scienze sparsi nei due mondi. La I. Annata forma un bel volume di più di 800 pagine in 8°; oltre ad una preziosa bibliografia analitica degli scritti recenti sopra la teoria delle varie scienze, comprende molti lavori originali; riferiamo i titoli di quelli relativi alle matematiche:

D. E. Smith. The geomerry of the Hindous.

A. Favaro. Di Nicolò Tartaglia e della stampa di alcune delle sue opere con particolare riguardo alla " Travagliata Inventione "

G. Sarton, Les tendenas actualles de l'histoire des mathématiques.

G. Loria. Le glorie matematiche della Granbretagna.

P. E. B. Jourdain. The origin of Cauchy conception of a definite integral and of the continuity of a function

* * *

Onoranze a N. Tartaglia. Per iniziativa di V. Tonni-Bazza fu collocato a Roma nel Pincio, un busto in marmo al sommo matematico bresciano, opera insigne dello scultore M. Benini.

* * *

Un monumento a Laplace verrà innalzato a Beaumont-en Auge (Calvados), ov'egli nacque il 22 Marzo 1749; per raccogliere i fondi necessari venne costituito un Comitato internazionale con sede a Parigi.

* * *

Temi proposti dalla R. Accademia del Belgio. I. Si chiede un contributo importante alla geometria infinitesimale delle superficie (Premio 800 fr.). II. Riassumere i lavori sui sistemi di coniche nello spazio e fare nuove ricerche sopra tali sistemi (Premio fr. 800).

Scadenza 31 Luglio 1915.

Pavia —Premiata Tipografia Successori Fratelli Fusi — Pavia

Digitized by Google

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E STORIA
DELLE
SCIENZE MATEMATICHE
ANNO XVI, Fasc. III: **Luglio, Agosto e Settembre** 1914

La teoria delle proporzioni

in un manoscritto inedito di Evangelista Torricelli

di

FRANCESCO PODETTI

1. In un mio precedente articolo apparso su questo stesso *Bollettino* (1), mi occupai della storia della teoria delle proporzioni nel secolo XVII, e dell' interessante sviluppo che a tale teoria diede G. A. BORELLI nel suo *Euclides restitutus*.

Alla cortesia del chiaro prof.re Gino Loria debbo la conoscenza di un' altra analoga teoria dovuta ad un grande discepolo di Galileo, ad EVANGELISTA TORRICELLI. Essa è contenuta in un manoscritto tuttora inedito e che verrà raccolto nel primo volume delle *Opere complete* di E. Torricelli, che per nobile iniziativa del Comune di Faenza, ed a spese del Comune stesso, ora si stanno stampando sotto la direzione del prof. Loria.

Per completare l'esame dei vari tentativi che ebbero origine dalla critica di Galileo alle definizioni del V. libro di Euclide, cercherò di esporre qui brevemente la teoria delle proporzioni così come risulta dal manoscritto torricelliano, e di esaminare in quali punti essa si accosti o si differenzi da quelle a noi già note del secolo XVII.

2. Il manoscritto del Torricelli, dal titolo " *De proportionibus liber* " è diviso in tre parti.

(1) *La teoria delle proporzioni in un testo del XVII secolo*. Anno XV. fascicolo 1°.

Digitized by Google

Nella prima: " *Ad amicum lectorem proemium* " troviamo una lunga dissertazione sulle condizioni a cui deve sodisfare una buona definizione geometrica, e la conseguente condanna della 6ª definizione del V. libro di Euclide.

Questa parte del manoscritto è in qualche punto una parafrasi del dialogo galileiano sullo stesso argomento, e in altri non contiene nessuna nuova e seria considerazione critica avversa alla definizione euclidea di proporzione.

Si può unicamente osservare che in essa si trovano esposti alcuni principi a cui deve informarsi una definizione geometrica, la cui validità è anche oggi riconosciuta. Tale è quello di natura pedagogica in cui il Torricelli afferma che una definizione non deve apparire arbitraria, in ispecie quando dell'ente definito noi possediamo un concetto intuitivo (1), e l'altro, di natura logica, in cui egli fa notare che data una definizione occorre dimostrare che esiste qualche soggetto che soddisfa alle condizioni poste nella definizione. (2).

Ciò però non impedì al Torricelli di cadere in un errore assai comune ai suoi tempi, di dar cioè valore effettivo di definizione geometrica alla nota definizione di ragione di due grandezze che Euclide premette al suo V. libro. Da questa sua convinzione trae la conclusione che Euclide avrebbe dovuto dimostrare la dipendenza fra l'accennata definizione e la definizione di eguaglianza di due ragioni.

3. Nella seconda parte del manoscritto troviamo la parte sostanziale della teoria.

Precedono alcune *definizioni* ed alcune *supposizioni* ed *assiomi*. Fra le prime troviamo la già ricordata definizione di ragione di due grandezze: *Ratio est quaedam duarum magnitudinum ejusdem generis unius ad alteram secundum quantitatem habitudo.*

(1) « *Geometra enim in definiendis illis rebus, quarum conceptus jam aliquo modo apud multitudinem praexistit liber, et sui juris omnino non est: sed debet accommodare definitionem suam tali conceptui.*

(2) « *Video ad hanc dubitationem meam in promptu esse responsionem illam, Geometrae definitori incumbere onus probandi, atque demonstrandi, quod in aliquo subjecto reperiatur ea conditio, quam ipse posuit in definitione: et hoc quotiescumque ea conditio obscura fuerit, neque ex se ipsa statim appareat: quod cum ostenderit concedendum erit ei subjectum illud esse idem prorsus quod antea definiverat.* »

Digitized by Google

Da questa deduce che la proporzione è l'eguaglianza di due ragioni.

Poichè tali definizioni non possono avere alcun valore nei riguardi della teoria seguente, analizzando le *supposizioni* e gli *assiomi* che seguono, e che dovrebbero nel loro complesso sostituire la definizione di proporzione, troveremo che il Torricelli sostituisce alla definizione di proporzione, il postulato dell'esistenza della quarta proporzionale, che egli tacitamente ammette, assumendo così come primitivo il concetto di uguaglianza di due rapporti, e attribuendo poi a tale uguaglianza, come postulati, le caratteristiche sue proprietà.

In tal modo egli sorpassa, con non certo lodevole procedimento, ciò che fece Euclide, il quale assume come primitivo il concetto di rapporto, dandone la nota definizione che i logici dicono per astrazione, definendo cioè la uguaglianza di due rapporti e dimostrando poi le caratteristiche proprietà di tale uguaglianza.

4. Fra le proprietà che il Torricelli ammette come assiomi troviamo anzi tutto la proprietà transitiva dell'uguaglianza di due rapporti (ass.ª 1°); così pure egli ammette che se due grandezze A e B sono uguali sarà $\frac{A}{C} = \frac{B}{C}$ (ass.ª 2°) e $\frac{C}{A} = \frac{C}{B}$ (ass. 3ª), insieme alle inverse di queste ultime proprietà.

Troviamo ancora affermato che il rapporto di due grandezze commensurabili $m\,A$ ed $n\,A$ è uguale al rapporto aritmetico dei numeri m ed n (ass.ª 6°), e questa proposizione, unitamente all'ass.ª 1.° già enunciato, conduce poi nelle seguenti dimostrazioni a dedurre l'uguaglianza dei rapporti di due grandezze commensurabili, dell'uguaglianza dei loro rapporti aritmetici.

Definisce poi la diseguaglianza di due rapporti e precisamente definisce $\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$ quando essendo $\frac{A'}{B} = \frac{C}{D}$, si ha $A > A'$. (1).

5. Alle proprietà ricordate nel § precedente, il Torricelli fa seguire la dimostrazione di alcune altre proprietà dei rapporti,

(1) Come in questa definizione troveremo anche in altre proposizioni tacitamente ammessa l'esistenza della grandezza A' la quale ammissione equivale al postulato dell'esistenza della quarta proporzionale. Così pure il *T.* applica nel seguito altre proprietà dei rapporti che egli non enuncia esplicitamente; ad es. dalle relazioni $\frac{A}{B} \geq \frac{C}{D}$. $\frac{E}{F}$ dedurrà $\frac{A}{B} > \frac{E}{F}$.

Digitized by Google

limitando però, nella 2.ª parte del suo scritto, tali dimostrazioni al caso dei segmenti.

Dopo aver dimostrato (prop.ᵉ 1ª) un lemma che non è che una diversa forma del postulato di Archimede (1), dimostra nelle due seguenti proposizioni (2ª e 3ª) il teorema: *Due triangoli di uguale altezza sono proporzionali alle loro basi*, dal quale egli fa discendere le dimostrazioni delle ricordate proprietà delle proporzioni fra segmenti.

Nella prop.ᵉ 2ª egli dà la dimostrazione del teorema accennato nel caso della commensurabilità delle basi dei due triangoli, e tale dimostrazione è ottenuta deducendo l'uguaglianza dei rapporti fra i due triangoli e le loro basi dall'uguaglianza dei loro rapporti aritmetici, come è ricordato nel § precedente.

Vediamo invece la dimostrazione che il Torricelli ci dà nella 3.ª prop.ᵉ quando le basi siano fra loro incommensurabili, che qui possiamo riassumere nel modo seguente: Siano a ed a' le basi dei due triangoli T e T' di uguale altezza h, e sia b il segmento tale che $\frac{b}{a'} = \frac{T}{T'}$. Supposto $b < a$, per il postulato di Archimede (prop.ᵉ 1ª) esiste un intero n tale che sia $\frac{a'}{n} < a-b$, e sempre per lo stesso postulato esiste un intero m tale che sia $b < m\frac{a'}{n} < a$. Se allora indichiamo con T'' il triangolo di base $m\frac{a'}{n}$ e di altezza h, per il precedente caso (prop. 2ª) sarà $\frac{T''}{T'} = \frac{m\frac{a'}{n}}{a'}$ e quindi $\frac{T''}{T'} > \frac{b}{a'}$ (perchè essendo $m\frac{a'}{n} > b$ è anche $\frac{m\frac{a'}{n}}{a'} > \frac{b}{a'}$ secondo la definizione di diseguaglianza di due rapporti). Sapendo ora che $\frac{T}{T'} > \frac{T''}{T'}$ perchè $T > T''$, ne deduce $\frac{T}{T'} > \frac{b}{a'}$ (2) il che contraddice alla supposizione $\frac{b}{a'} = \frac{T}{T'}$.

(1) Tale lemma è con poche variazioni la prop.ᵉ 1.ª del libro X d'Euclide.
(2) Vedi la prima nota (1) al n. 4.

Digitized by Google

Dall'ipotesi $b > a$ deduce analogamente $\frac{b}{a'} > \frac{T}{T'}$ che pure contraddice alla supposizione $\frac{b}{a'} = \frac{T}{T'}$; quindi per l'esistenza della quarta proporzionale $\frac{a}{a'} = \frac{T}{T'}$.

6. Dalla dimostrazione della 3ª proposizione del Torricelli risulta dunque il seguente criterio da lui usato per dimostrare la proporzionalità fra 4 grandezze:

" Sarà $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ quando non potrà esistere altra grandzza A' omogenea con A, e maggiore o minore di questa, tale che sia $\frac{A'}{B} = \frac{C}{D}$. " Questo criterio non è che una conseguenza immediata dell'ammessa esistenza della quarta proporzionale, come abbiamo visto nella dimostrazione del § precedente.

Da ciò possiamo dedurre l'identità del procedimento seguito dal Torricelli per introdurre il concetto di proporzione, con quello seguito da Galileo.

Anche questi infatti ammette l'esistenza della quarta proporzionale, colle parole seguenti: *Suppongasi primieramente che date in qualunque modo tre grandezze, quella proporzione, o quel rispetto o quella relazione di quantità che ha la prima verso la seconda, possa averla la terza verso una quarta* (1).

Manca pure nel dialogo galileiano una definizione generale di proporzione fra quattro grandezze che valga a dedurne le proposizioni del V libro di Euclide (2), ma vi troveremo invece il seguente criterio di proporzionalità identico a quello seguito dal Torricelli: *Quando la prima per avere alla seconda la medesima proporzione che la terza alla quarta, non è punto nè maggiore nè minore di quello che essa dovrebbe essere, allora si intende aver la prima alla seconda la medesima proporzione che la terza alla quarta* (3).

(1) Galileo Galilei, *Opere*, Firenze, Barbera, 1898, vol. VIII pag. 351.

(2) Tale non è certo la seguente da lui enunciata: « *Allora noi intendiamo quattro grandezze essere proporzionali fra loro quando l'eccesso della prima sopra la seconda (qualunque essa sia) sarà simile all'eccesso della terza sopra la quarta* » (*loc. cit.* pag. 352).

(3) Galileo, *loc. cit.*, pag. 353.

Digitized by Google

E dopo aver definito come il Torricelli la diseguaglianza di due rapporti, egli segue appunto l'accennato criterio di proporzionalità nel dimostrare successive proposizioni.

Appare dunque in modo evidente che il Torricelli seguì la via indicatagli dal Maestro nell'introdurre il concetto di ugnaglianza di due rapporti e che la teoria torricelliana, come quella del Viviani, non solo ebbe origine dalla critica di Galileo alle definizioni del V libro di Euclide, ma si informò allo stesso metodo che Galileo suggerì in sostituzione di quello euclideo.

7. Da quanto ho ora esposto possiamo dedurre una conferma di ciò che scrivevo nel mio lavoro sulla teoria delle proporzioni di G. A. Borelli, e cioè che tale teoria è il più felice tentativo di quel tempo, occasionato dalla critica galileiana delle definizioni del V libro.

Troviamo infatti che il Borelli per evitare le difficoltà di natura pedagogica presentate dalle definizioni euclidee, non sopprime queste definizioni, come or ora vedemmo fatto nelle teorie degli altri suoi contemporanei, ma le sostituisce con altre che non solo precorrono i tempi, dandoci per il confronto di due rapporti delle definizioni analoghe a quelle che ora si seguono per il confronto di due numeri reali, ma ci danno ancora un esempio di una esposizione razionale induttiva di una definizione, secondo il metodo propugnato oggi da valenti pedagogisti.

Le difficoltà di natura didattica che offre la definizione euclidea di proporzione, si attribuiscono oggi al metodo razionale deduttivo seguito da Euclide. (1)

Vediamo invece il Borelli risalire induttivamente dalla definizione di proporzione fra coppie di grandezze commensurabili, alla definizione di diseguaglianza fra il rapporto di grandezze commensurabili e quello di due grandezze incommensurabili, indi alle definizioni di diseguaglianza di due rapporti qualsiasi, e infine alla definizione di proporzione fra due coppie qualsiasi di grandezze omogenee (2).

8. Passiamo ora a quel gruppo di proporzioni che il Torricelli dimostra dapprima per la sola classe dei segmenti.

(1) Enriques, *Questioni riguardanti le matematiche elementari*. — Bologna 1912, vol. I, pag. 24-25.

(2) Vedi il già citato mio articolo su: *La teoria delle proporzioni in un testo del XVII secolo*.

Digitized by Google

Dalla 3ª proposizione deduce anzitutto, colle stesse dimostrazioni del VI libro di Euclide, che: *Una retta parallela ad un lato di un triangolo, determina sugli altri due lati coppie di segmenti proporzionali* (prop.ᵉ 4ª), e che: *In un triangolo la bisettrice di un angolo determina sul tato opposto a quest'angolo segmenti proporzionali agli altri due lati* (prop.ᵉ 5ª).

Dimostra inoltre che una proporzione fra quattro segmenti si può *invertire* (prop.ᵉ 6ª), *comporre* (prop.ᵉ 7ª) *dividere* (prop.ᵉ 8ª), e che in essa si possono *permutare i medi* (propᵉ 9ª).

Per dimostrare la prop.ᵉ 6ª, e cioè come si possa invertire la proporzione fra quattro segmenti $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, egli considera su di un lato di un qualsiasi angolo di vertice A due segmenti consecutivi AB e BC rispettivamente uguali ad a e b, e sull'altro lato i segmenti pure consecutivi AD e DE uguali rispettivamente a c e d. Risulterà BD parallela a CE (prop.ᵉ 4ª) e quindi tracciati i segmenti BE e CD si avrà (prop.ᵉ 3ª): $\frac{\text{triang. } DBC}{\text{triang. } ABD} = \frac{BC}{BA}$ e $\frac{\text{triang. } EBD}{\text{triang. } ABD} = \frac{ED}{DA}$. Ma per l'uguaglianza dei rapporti fra le coppie di triangoli (ass.ª 2ª) e per la proprietà transitiva dell'uguaglianza dei rapporti, risulterà $\frac{BC}{BA} = \frac{DE}{DA}$ cioè $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$.

Dalla stessa figura della precedente dimostrazione e con analogo procedimento, il Torricelli deduce la dimostrazione delle prop. 7ª ed 8ª. Riporterò qui ancora la dimostrazione della prop. 9ª che non manca di una certa eleganza e che ci dà una idea ancora più chiara del modo seguito dal Torricelli per far dipendere queste proposizioni delle precedenti.

Sia la proporzione fra quattro segmenti $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, dalla quale dobbiamo dedurre la proporzione $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

Rifatta la identica costruzione usata nella dimostrazione della prop. 6ª, si conduca la bisettrice dell'angolo CAE e sia F il punto d'incontro di questa bisettrice col segmento BD. Avremo (prop. 5ª) $\frac{AB}{AD} = \frac{BF}{FD}$ e, costruiti i segmenti CF ed EF, avremo ancora (prop. 3ª)

Digitized by Google

$$\frac{\text{triang. } CBF}{\text{triang. } EDF} = \frac{BF}{FD} \text{ e } \frac{\text{triang. } CBF}{\text{triang. } EDF} = \frac{CB}{ED},$$

poichè detti triangoli hanno uguale altezza anche rispetto alle basi CB ed ED (Euclide I, 26). Dalle proposizioni dimostrate risulta (ass. I^a) $\frac{AB}{AD} = \frac{CB}{ED}$ ossia $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

Segue la dimostrazione del teorema della *ragion composta* (prop. 10) in cui dalle proporzioni fra segmenti $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$; $\frac{b}{c} = \frac{e}{f}$; $\frac{c}{h} = \frac{f}{i}$, deduce la proporzione $\frac{a}{h} = \frac{d}{i}$, permutando i medi delle proporzioni che costituiscono l'ipotesi del teorema.

9. Le cinque precedenti proposizioni (dalla 6^a alla 10^a) reggono le altre proprietà delle proporzioni dimostrate dal Torricelli. Qualora si dimostri la validità di queste cinque proposizioni per altre classi di grandezze, ne verrà la estendibilità a tali classi di tutte susseguenti proprietà, da lui dimostrate.

Perciò il nostro autore ci fa osservare come sia necessaria la dimostrazione di tale validità, rimandandola però ad una *Appendice*, che è appunto la terza parte del suo manoscritto.

Dopo tale osservazione egli dimostra (prop. 11^a) il teorema della *ragion perturbata* (Euclide V, 23) dando di questa proposizione quella stessa dimostrazione che il Viviani doveva poi riportare nel suo *Quinto libro degli Elementi d'Euclide* (1).

Dimostra inoltre come dalla proporzione $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si possa dedurre la prop.^{a} $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$ quando sia $a > b$ (prop.^{a} 12) e la proporzione $\frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b}$ quando sia $a > c$ (prop. 13).

(1) Il Viviani cita il Torricelli come autore della su ricordata dimostrazione (che è la 19^a della sua teoria) e con altre numerose citazioni ci persuade di aver usato assai il manoscritto del Torricelli per compilare il suo libro delle proporzioni. È noto che il Viviani fu incaricato alla morte del T. della pubblicazione dei suoi manoscritti inediti (A. Fabroni. *Vitae Italorum doctrina excellentium*. Pisa, 1778, vol. I pag. 366) e che ebbe per ciò facile modo di conoscere anche quello di cui qui ci occupiamo.

Digitized by Google

Dimostra ancora che due grandezze stanno fra loro come due loro equimultiple (prop.ª 14ª) e che se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ sarà pure $\frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{e}{f}$ (prop. 15ª). Nella prop.ª 16ª dimostra che se due grandezze sono diseguali, una terza grandezza omogenea con esse ha alla minore rapporto maggiore che alla maggiore.

Infine riporta (prop. 17ª e 18ª) le prop. 24ª e 25ª del V libro di Euclide, dandone la stessa dimostrazione euclidea.

Pur trattandosi di un manoscritto inedito credo inutile riportare qui le dimostrazioni di queste proposizioni date dal Torricelli, perchè alcune di queste dimostrazioni sono già note (come per es. per la 11ª) e per le altre è ovvia la dipendenza fra di esse e le cinque precedenti proposizioni ricordate. Così ad es. egli dimostra la prop. 15 partendo dalle proporzioni che costituiscono l'ipotesi e successivamente permutando e componendo.

10. La terza parte del manoscritto torricelliano, è, come ho già detto, una *Appendice* nella quale l'autore vuol dimostrare per altre classi di grandezze quel gruppo di cinque proposizioni che egli ha già precedentemente dimostrato per la sola classe dei segmenti.

Il Torricelli si propone di dimostrare come tutte le accennate proposizioni siano estendibili alle classi delle superficie, dei solidi, dei tempi ecc. procedendo per esempi. Così egli dimostra dapprima come si possa *invertire* e *comporre* la proporzione $\frac{a}{b} = \frac{C}{D}$ quando a e b siano segmenti e C e D siano superfice, come si possa dividere una proporzione fra quattro superficie, e come in una tale proporzione si possano *permutare i medi.*

Dimostra pure, come nella prop. 10ª per i segmenti, che il rapporto fra due segmenti è uguale al rapporto di due superficie, quando detti rapporti siano, secondo la definizione euclidea di rapporto composto, composti di rapporti uguali.

Tutte queste dimostrazioni sono da lui fatte dipendere dalle dimostrazioni delle analoghe proprietà per la classe dei segmenti usando del seguente postulato: *Data una superficie, esiste un triangolo di data altezza che sia eguale* (1) *alla superficie data.*

(1) Tale uguaglianza va intesa nel senso euclideo di uguaglianza di due superficie.

Digitized by Google

Questa ammissione, che mette ancora una volta in rilievo il procedimento intuitivo da lui seguito, non parve al Torricelli richiedere alcuno schiarimento o giustificazione, perchè egli ci dice:

Neque vero quis me arguat quod in superiori, vel in aliqua ex sequentibus constructionibus conceperim, et velut facta supposuerim duo triangula aeque alta, et quibuscumque datis figuris aequalia. Nam is parum se Geometram ostenderet. Certum enim est in demostratione theorematum nos supponere posse tamquam factum quicquid manifesto constat fieri posse, licet a nemine unquam factum fuerit. In problematibus vero aliter se res habet.

Dovendo così dimostrare che dalla proporzione $\frac{a}{b} = \frac{C}{D}$ fra una coppia di segmenti a e b e una coppia di superficie C e D, si deduce la proporzione $\frac{b}{a} = \frac{D}{C}$ egli considera due triangoli, che indicheremo con T e T_1, di ugual altezza ed eguali in superficie a C e D rispettivamente. Si avrà così $\frac{a}{b} = \frac{T}{T_1}$ (come conseguenza degli assiomi 2° e 3° e della proprietà transitiva dell'uguagliauza dei rapporti) ed essendo c e d le basi di T e T_1, ne verrà $\frac{T}{T_1} = \frac{c}{d}$ e quindi $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Invertendo questa proporzione fra segmenti si avrà $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ e per essere $\frac{d}{c} = \frac{T_1}{T} = \frac{D}{C}$ ne risulterà che $\frac{b}{a} = \frac{D}{C}$.

In modo analogo a quello seguito in questa dimostrazione, egli riconduce alle analoghe proprietà fra segmenti, le dimostrazioni delle altre quattro proporzioni su ricordate.

11. Possiamo ora renderci conto brevemente del modo usato dal Torricelli per estendere al caso di proporzioni di cui una od entrambe le coppie di grandezze proporzionali siano costituite da solidi, le proprietà già da lui dimostrate nelle cinque citate proposizioni.

Egli non può più in tal caso servirsi della prop. 3ª e del postulato enunciato nel § precedente. Alla prop. 3ª egli sostituisce la seguente: *Due cilindri (o parallelepipedi) di ugual base sono proporzionali alle rispettive altezze.* E la dimostrazione che

Digitized by Google

egli ci dà di questa proposizione è fondata sullo stesso criterio di proporzionalità usato nella dimostrazione della prop. 3ª poichè, indicando con h ed h' le altezze dei due cilindri C e C', egli dimostra che ogni altro segmento maggiore o minore di h non può avere ad h' rapporto uguale a quello di C a C', seguendo in tale dimostrazione un procedimento identico a quello seguito per la stessa prop. 3ª.

In luogo del postulato usato nel § precedente, egli afferma che: *Dato un solido, esiste un cilindro di determinata base, uguale al solido dato.*

Da queste due proposizioni, servendosi degli assiomi da lui ammessi, egli dimostra riconducendola pure alla analoga proposizione per i segmenti, che si può dividere una proporzione di cui una coppia sia costituita da segmenti ed un'altrà da solidi.

Infine per dimostrare con un esempio come lo stesso criterio di proporzionalità da lui seguito possa applicarsi ad altre classi di grandezze oltre quelle considerate, egli dimostra che: *Nel moto uniforme gli spazi percorsi sono proporzionali ai tempi corrispondenti.*

Rappresentando gli spazi ed i tempi con segmenti, la sua dimostrazione si svolge identicamente a quella della prop. 3ª, ed è di facile ricostruzione quando ci si giovi del principio che a spazi uguali corrispondono tempi uguali.

12. Abbiamo già notato le analogie fra il metodo seguito dal Torricelli e quello usato da Galileo nell'introdurre il concetto di proporzione. L'esame dello sviluppo successivo della teoria torricelliana ci dà ora il modo di affermare che in esso il Torricelli si propose uno scopo diverso da quello che si era prefisso il sommo suo Maestro. Mentre infatti Galileo volle unicamente dimostrare, basandosi su principi diversi da quelli euclidei, le proposizioni che Euclide assume come definizioni dell'uguaglianza e diseguaglianza di due rapporti, il Torricelli, per nulla curandosi di queste proposizioni, volle invece dare la dimostrazione delle proprietà delle proporzioni, estendendole mano a mano alle varie classi di grandezze concrete, guidato dal proposito di rendere meno astratta la teoria generale delle proporzioni. Furono dunque considerazioni di natura didattica che lo indussero a scrivere la teoria delle proporzioni sotto la forma che noi ora abbiamo visto.

Questo suo proposito traspare anche dalle considerazioni seguenti che egli fa seguire alla dimostrazione della proporzionalità

Digitized by Google

fra gli spazi ed i tempi corrispondenti nel moto uniforme: *Non me fugit demonstrationem hanc omnesque illi similes ad unicum casum reduci potuisse, facta scilicet constructione semel tantum sive super lineis, sive super temporibus, prout haec, vel illae majorem habere rationem dicerentur, sed malui aliquam potius obscuritatem vitare, quam prolixitatem. Poterant etiam omnes praedictae propositiones sub unico tantum theoremate universalissimo comprehendi atque demonstrari..... Sed alterius loci, operisque duxi hujusmodi demonstrationes exhibere. Imo repetitum toties eamdem demonstrationem, non ex casu, aut necessitate sed consilio, et data opera sequutus sum.*

Non è dunque l'organico sviluppo della teoria borelliana che noi troviamo nel manoscritto del Torricelli, ma una trattazione dovuta al proposito di esporre mediante semplici e piane dimostrazioni riferite a grandezze concrete, le proprietà del V libro di Euclide, usando dei principi che Galileo volle sostituire alle definizioni di Euclide.

Opere complete e Enciclopedie.

J. J. Sylvester, *Mathematical Papers*, Vol. IV (1882-1897) Cambridge University Press 1912. 8° gr. p. XXXVII 756 (Prezzo sh. 18).

Questo ultimo volume delle opere del grande matematico inglese (per i vol. prec. v. questo *Bollettino* T. VIII, 1905, p. 12; XI, 1909, p. 12; XIII, 1911, p. 87) contiene, oltre l'elenco completo dei contributi da lui dati alle " Mathematical Questions from the Educational Times „, settantacinque scritti relativi alla partizione dei numeri ed altre questioni di aritmetica superiore, alla teoria delle matrici, all'algebra universale, ai quaternioni ed ai reciprocanti; tutti pieni di vedute nuove e di metodi originali ma redatti in quella forma rapida, impulsiva e talora imprecisa che nemmeno gli anni valsero a correggere e che indusse un giorno il Salmon ad equiparare le pubblicazioni del Sylvester ai nervosi bollettini redatti dai generali sopra i campi di battaglia.

Il volume in questione è ornato da due bellissimi ritratti del Sylvester e si apre con una diligentissima biografia dovuta all'editore (H. F. Baker), dalla quale si apprendono le vicissitudini del sommo scienziato, la cui vita fu ben diversa da quella pacifica e tranquilla, caratteristica della maggior parte degli scienziati. A dimostrar ciò riferiamo qualche data e qualche fatto.

Digitized by Google

Il Sylvester nacque a Londra il 3 Settembre 1814 e sin da giovinetto mostrò straordinaria facilità per le lingue e attitudini spiccate per la musica e la poesia. Nel 1829 lo troviamo studente a Liverpool, ove manifestò una così chiara vocazione per gli studi scientifici da indurlo a recarsi a Cambridge (1831) per seguirvi gli studi matematici. Riuscito secondo nell'esame finale (1837), l'anno seguente, benchè molto giovane, fu chiamato nell'University College di Londra per occuparvi la cattedra di filosofia naturale. Il 25 Aprile dell'anno successivo fu eletto F. R. S. e nel 1841 accettò l'invito di andare in America ad insegnare nell'Università di Virginia. Ma, dopo tre anni di soggiorno, per la sua attitudine francamente antischiavistica, fu costretto a rimpatriare. Lasciò allora l'insegnamento e divenne attuario presso una grande Società d'assicurazione. Si volse poi all'avvocatura e fu ammesso all'Inner Temple (Collegio degli avvocati di Londra) il 29 Luglio 1846; ivi trovò un altro grande matematico, A. Cayley, col quale si strinse di una amicizia che doveva durare sino alla morte. Ma in questa professione non doveva rimanere, chè nel 1855 gli venne conferito il posto di professore di filosofia naturale nell'Accademia militare di Woolwich, che doveva occupare sino al 1870. Nello stesso anno 1855 fondò assieme ad altri il *Quarterly Joornal of Mathematics* e nel 1863 fu eletto corrispondente dell'Istituto di Francia. Gli anni 1875-1883 furono da lui passati nuovamente in America nell'Università di Baltimora; egli fondò colà (1878) l'*American Joornal of Mathematics*, ivi (1878) gli pervenne la Medaglia Copley conferitagli dal Royal Society di Londra. Nel 1883 ritornò in Inghilterra chiamato a succedere a H. J. S. Smith nella cattedra di Oxford; ivi fondò una nuova società matematica. Nel 1887 gli fu conferita la medaglia de Morgan, nel 1894 chiese ed ottenne di venire collocato a riposo; morì tre anni dopo il 15 Marzo 1897.

Le idee originali e feconde sparse nei suoi scritti, per la forma strana in cui sono esposte, non diedero ancora probabilmente tutti i frutti di cui sono capaci; riunendo in un tutto le sue pubblicazioni i connazionali di Sylvester si adoperarono nel modo più efficace ad assicurare ai semi da lui gettati una fioritura abbondante ed una fruttificazione utile al progresso della scienza.

G. L.

Digitized by Google

Meccanica.

GIAN ANTONIO MAGGI. — *Dinamica Fisica.* Lezioni sulle leggi generali del movimento dei corpi naturali (Pisa, Enrico Spoerri, 1912), pp. VI + 230 (Prezzo L. 8). (*Continuazione v.* p. 48)

Un'altra particolarità notevole è l'introduzione delle masse solamente per via di rapporto. Questo procedimento forma, come appare, parte essenziale del metodo descrittivo? Non è qui il caso di discuterlo; in caso affermativo, formerebbe secondo me uno dei difetti del metodo; ma so che su questo punto le opinioni sono molto discordi. In ogni caso, esso risale al Mach; ne è evidente l'origine nella meccanica celeste; l'attributo 2°, che forma il principale fondamento di tutta la trattazione del Maggi sembra espressamente e direi quasi unicamente adattato alle *forze* di gravitazione. Certo nell'astronomia le masse non si rivelano quasi altrimenti che per via di rapporto, e il metodo del Mach traduce allora fedelmente i fatti osservati. Al di fuori dei moti gravitazionali, le cose procedono diverse. Supposto un osservatore che abbia a disposizione oltre il suolo fermo, un corpo unico, sollecitabile a suo arbitrio con diverse molle tese, la meccanica ordinaria, insegna, anche con quei mezzi, a definire e misurare la massa di quel corpo, a prevedere il suo moto. La meccanica di Mach e Maggi resterebbe in quel caso completamente disarmata. Lo stesso avviene di fronte a corpi di massa variabile, di fronte a masse apparenti, di fronte a forze che non seguano la legge di azione e reazione, e così via. Resta dunque anche per questo motivo una trattazione del moto di corpi in campi d'attrazione del tipo classico.

Una terza particolarità, meno essenziale al metodo, è *il tramite* piuttosto lungo per mezzo di cui la nozione concreta si introduce dopo un lungo uso della ingombrante locuzione " grandezza della massa etc. „ Nessuno vorrà sostenere che quella locuzione conferisca alla leggibilità degli enunciati. Ma data l'introduzione delle masse per via di rapporto, quel gradino intermedio si rendeva naturale per non sottintendere nulla. Anche qui l'esposizione del Maggi è più precisa e più completa di quella del Mach da cui deriva. Se qualche studioso potrà ancora semplificare conservando le idee, e sopprimendo la " grandezza della massa etc. „ sarà un ulteriore progresso.

Digitized by Google

Un appunto che tocca la sostanza può rivolgersi al postulato 2°. Ne ho fatto cenno già in altro mio lavoro. (1) Un ferro in presenza di due calamite, non assume un'accelerazione risultante di quelle due che separatamente possono imprimergli le due calamite. Il Maggi può rispondermi che in questo caso, in realtà, non vi ha vero cumulo di due condizioni fisiche; la seconda calamita quando agisce insieme con la prima non produce la stessa condizione fisica come quando agisce da sola. E sia pure: ma in qual modo si distingue se vi è o no vero cumulo di condizioni fisiche? Nella meccanica descrittiva non si può far ciò con altro criterio che con quello delle accelerazioni. E se si adotta questo criterio, il postulato 2° si riduce a una tautologia, e un fondamento dell'edificio viene a mancare. Tutta questa lacuna è una conseguenza della mancata definizione di " condizione fisica „. L'antica meccanica, definita dinamometricamente la forza risultante che agisce su un corpo, può scrivere $\mathbf{F} = m\mathbf{j}$ quale legge che esprime i fatti senza pericolo di circolo vizioso. Soppressa la nozione ausiliaria di forza, e quindi la possibilità di una definizione generale applicabile ad esprimere l'effetto meccanico di una condizione fisica qualunque, non saprei vedere altra logica soluzione se non quella di scindere il postulato 2.° in tanti altri da formularsi separatamente, per uno l'attrazione newtoniana, uno per le azioni elettrostatiche, etc.; ciò esige di incoporarlo con le trattazioni fisiche corrispondenti. Ed è quella che dobrebbe essere la espressione ultima della dinamica completamente fisica, Del resto, l'indirizzo descrittivo tende appunto a questa mira ultima: descrivere direttamente il moto dovuto a condizioni fisiche assegnate sopprimendo l'intermediario di leggi meccaniche generali. Non manca, come si vede, argomento per nuove ricerche.

Ma proseguiamo nel nostro esame. I successivi §§ 4-12 contengono, oltre gli enunciati delle proposizioni, le deduzioni e i teoremi più immediati, i fondamenti della teoria dei baricentri, e osservazioni esplicative importanti che temperano la forma astratta degli enunciati, vivificando con l'illustrazione fisica, ed esponendo qualche punto essenziale di confronto coi metodi classici. Richiamerò attenzione particolare sulle osservazioni contenute nel § 21

(1) *Il concetto di massa nell'insegnamento elementare della meccanica* (in collaborazione con Piola e Vailati). Nuovo Cimento Serie V, vol. XIV (1907), pp. 80-124 e 225-245.

Digitized by Google

(confronto con la nozione di punto materiale), nel § 32 (significato e portata dei postulati), nel § 37 (confronto di " massa „ con " quantità di materia „). Venendo al § 44, in una osservazione non posso convenire: che il concetto di *forza motrice* (massa × accelerazione) sia sostanzialmente equivalente a quello di forza ordinaria, e che maggiormente lo precisi. Precisa certo è la forza motrice definita così, ma precisa anche è la nozione di forza ordinaria quando si definisca dinamometricamente. Le due nozioni solamente si equivalgono quando si tratta del moto di un punto materiale libero in un campo di forze; ma facciamo il caso opposto: un corpo esteso, in quiete in equilibrio, non sollecitato da azioni esterne, ma sollecitato da una distribuzione di tensioni elastiche (come può essere una travatura reticolare con un'asta sovrabbondante, come sono gli anelli elastici studiati dal Volterra); in questo caso se applichiamo senza ricercare sottigliezze la definizione di forza motrice, troviamo accelerazioni tutte nulle, quindi forze motrici nulle; la meccanica ordinaria rintraccia e determina invece una distribuzione di forze interne; la loro esistenza può accertarsi anche in assenza completa di moto, con vari mezzi, p. es. otticamente (esperienze di Corbino), e la loro importanza pratica non è che troppo grande. Le ragioni di preferenza stanno dunque verso quella teoria che ne tiene esplicito conto.

Nei §§ 45-55 seguono deduzioni sul moto del centro di massa, sulle quantità di moto, sulle forze di Coriolis; presentate tutte in modo molto sobrio e perspicuo. Nel capitolo seguente §§ 56-61 si svolgono i fondamenti della trattazione del moto dei corpi per gravità; ed è un capitolo particolarmente importante per l'applicazione del metodo descrittivo, che qui trova il campo suo proprio di svolgimento. Nel corso di questo capitolo, § 58 vengono stabiliti i legami con la meccanica classica, introducendo il fatto sperimentale che la caduta di un grave può essere impedita mediante una molla. Si espone allora la teoria dinamometrica con poca differenza da quello che potrebbe o dovrebbe farsi nella meccanica classica. Da questo punto in poi, l'Autore dispone di entrambe le risorse delle due meccaniche, e procede in modo meno differente dal consueto.

La parte seconda del libro (§§ 63-151) è intitolata " Teoremi generali della Dinamica „. Il § 63 introduttivo, illustra in modo chiaro e compendioso il concetto informativo delle equazioni e

Digitized by Google

dei teoremi di Dinamica; ed espone la premessa che in questa parte del corso i vincoli, le forze limite, le pressioni saranno tenute fuori conto, considerandoli (in parte con ragione) quali " artifizii ". Nei §§ 64-72 l'Autore espone le teorie preliminari sulla trattazione delle forze motrici. Nel § 73 vengono molto opportunamente introdotta, col titolo di " equazioni cardinali " le due equazioni vettoriali o le sei scalari, che equivalgono alla unica $\Sigma \mathbf{f} = \Sigma m\mathbf{j}$, motorialmente interpretata. Seguono le deduzioni statiche, indi il teorema del baricentro, nelle sue varie possibili forme. I §§ 87-88 interrompono, a giusto punto lo svolgimento astratto, illustrando le conseguenze fisiche e pratiche. Un cenno ai moti impulsivi mostra poi che l'Autore non è forse così alieno dagli infinitesimi attuali, come dimostra esserlo nella introduzione. Con la stessa agevolezza come è stato dedotto il teorema del baricentro vengono poi nei §§ 90 e successivi dedotti, anch'essi come immediata conseguenza delle equazioni cardinali, i teoremi sui momenti delle quantità di moto; e similmente vengono essi illustrati nel § 100, sia con esempi tecnici sia con esempi astronomici, togliendo occasione per esporre in modo istruttivo e succinto i fondamenti della teoria cosmogonica di Laplace. Meno agevole riesce la trattazione delle forze vive, contenuta nei §§ 101-118, perchè il dover tenere conto delle forze interne impedisce il ridurre tutto a immediato corollario delle equazioni cardinali. Nel § 119 segue la dichiarazione dei sistemi di misura e delle unità relative alle grandezze introdotte nei §§ precedenti; questi complementi danno valor pratico al libro; l' autore, come simboli delle unità indica abbreviazioni di propria scelta, cioè Kg, Kgm, Cav., etc.; credo che sarebbe stato preferibile dare o almeno citare simboli normali, kg, kgm, hp, della commissione internazionale, che sono quelli poi usati nella pratica generale. Segue un cenno forse troppo sommario di applicazione dei teoremi sull'energia alle macchine, indi una esposizione sulla energia potenziale (che l' Autore, seguendo l'espressione, meno felice, della scuola del Betti, chiama " potenziale " senz'altro), e sui teoremi della conservazione dell'energia e dell' equilibio.

La parte terza, del libro è dedicata al Calcolo del movimento per gravitazione. Il metodo descrittivo trova qui il suo campo di applicazione adatto, e questo spiega perchè la parte terza sia di gran lunga la parte più bella e la più attraente di tutto il libro.

Digitized by Google

L'esposizione logica corrisponde qui al fatto storico, che dalle leggi di Keplero ha permesso ricavare la legge di Newton e indi scrivere le equazioni differenziali la cui integrazione conduce alle previsioni dei moti dei corpi celesti sotto condizioni più complesse. In brevi pagine il Maggi riesce a esporre molto sinteticamente le questioni generali, quelle relative al problema degli *n* corpi, dei due corpi, dei tre corpi, esteso o ristretto, e i calcoli d'approssimazione pel moto dei pianeti. Anche in trattati di meccanica di molto maggior mole si cerca e si desidera invano un cenno sopra così importanti questioni. Seguono alcuni paragrafi sul potenziale delle gravità e sulla deviazione dei gravi cadenti.

La trattazione propriamente detta del libro è con questo esaurita. L'Autore ha fatto seguire un'Appendice, intitolata " Nozioni fondamentali del calcolo del movimento dei corpi naturali „, nella quale espone le idee fondamentali per mezzo di cui si fa il passaggio da quella che ha chiamato Dinamica Fisica alla Meccanica ordinaria, con vincoli e pressioni. Il vincolo è definito dapprima nella sua forma assoluta geometrica, come nella Meccanica Analitica classica; si accenna poi il legame fra questo concetto e quello a cui si perviene dal caso della pressione elastica di contatto, passando al limite per rigidità indefinitamente crescenti. Un paragrafo intermedio è dedicato all'esame di ciò che il Maggi chiama forze limite: trattasi delle intensità specifiche di campo, e della loro definizione rigorosa nell'interno di corpi. Segue infine un'Appendice sulle Notazioni del Calcolo Vettoriale usate nel libro (sistema Burali Forti e Marcolongo, derivato dal sistema del Gibbs, e che mi sembra non si riveli del tutto il più adatto alle formole di Meccanica), e un'altra Appendice sulle Nozioni di Cinematica. A proposito di questa ultima, devo segnalare l'espressione molto felice " atto di movimento „ introdotta dal Maggi già nel suo trattato del 1896: " Atto di movimento „ per un sistema è quello che è la velocità per un punto, cioè è " l'insieme delle velocità di tutti i suoi punti considerate in relazione colla " posizione degli stessi punti al tempo *t*. „ in questo modo per es. si può dire che il moto di un sistema è determinato dando, oltre che le equazioni differenziali del moto, l'atto di movimento iniziale. L'esprimere tutte le proposizioni per mezzo di velocità e atti di movimento, come vorrebbe il Maggi abolendo la nozione di spostamento infinite-

Digitized by Google

simo, non riesce a vantaggio della chiarezza; e mi riferisco a quanto ho detto a proposito della tendenza di abolire gli infinitesimi attuali; ma pur conservando la considerazione degli " spostamenti infinitesimi „ l'introdurre come generalizzazione della " velocità „, l' " atto di movimento „ permette, come ho avuto occasiome di constatare anche nell'insegnamento, un grande risparmio di parole superflue.

Da questa rassegna confido che il lettore riuscirà come me convinto che il libro del Maggi è soppratutto un lavoro eminentememte originale e suggestivo. Ha ottimi capitoli didattici, segnatamente quello sulla meccanica celeste. Non converrebbe, a mio avviso, proporlo tutto quale modello per un primo insegnamento della Dinamica e in ogni caso non della Dinamica generale; anche nel suo lato essenziale il metodo del libro si applica a un caso particolare della Dinamica, caso piuttosto ristretto, e non si presta facilmente a generalizzazione; è un metodo da proporre in aggiunta a quello classico, non in sostituzione di esso. Ma per uno studioso già provetto, la meditazione accurata dell'opera e il confronto di essa con le trattazioni classiche non può non essere soggetto, ad ogni passo, di riflessioni istruttive, di idee critiche nuove, di suggerimenti fecondi. L'opera del Maggi, sintetizzata nei suoi due lavori " *Teoria Matematica del movimento dei corpi* „ e " *Dinamica Fisica* „, resterà come uno dei capisaldi per la storia della meccanica nei nostri tempi.

GIOVANNI GIORGI

Esercizi di calcolo infinitesimale.

F. DINGELDEY, *Sammlung von Aufgaben zur Anwendung der Differential-und Integralrechnung. Zweiter Teil: Aufgaben zur Anwendung der Integralrechnung.* Mit 96 Figuren im Text. 8° gr. p. 482. Leipzig und Berlin B. G. Teubner, 1913. (Prezzo del vol. leg. Mk.).

Nell'annunciare la pubblicazione della I Parte di questa ottima opera (v. *Bollettino*, T. XIII, 1911 p. 125) ne abbiamo ampiapiamente indicati i criteri informatori; non è certamente il caso di ripeterli ma si deve esplicitamemte rilevare che ad essi l'A. si è fedelmente attenuto; anzi le questoni tratte dalla tecnica e

Digitized by Google

da varie scienze naturali sono nella II Parte ancora più numerose ed impressionanti di quelle che s'incontrano nella I. Inoltre le notizie storiche e bibliografiche, benchè mantenute entro modesti confini, riescono singolarmente utili perchè (essendo esatte e chiare) rendono possibile a coloro che apprendono certe applicazioni pratiche delle scienze esatte di ricorrere agli scritti originali ove s'incontrano per la prima volta; onde l'opera del prof. Dingeldey riuscirà particolarmente utile a coloro che in Italia sono incaricati del Corso di matematiche per i Chimici ed i naturalisti.

Analogamente a quanto facemmo per la I Parte riferiremo i titoli dei paragrafi di cui consta questa II, chè una raccolta di questioni mal si presta ad una vera e propria recensione:

1. Regole generali d'integrazione; integrazione della potenza.

2. Alcuni esempi semplici relativi al metodo di sostituzione; integrazione delle potenze.

3. Integrali impropri.

4. Integrazione della funzione esponenziale e del logaritmo. Integrazione per parti.

5. Problemi relativi alle proprietá generali dell'integrale definito.

6. Le fuzioni trigonometriche e ciclometriche.

7. Altri esempi d'integrazione di funzioni trascendenti.

8. Integrazione delle funzioni razionali: A. Il denominatore non ha che fatttori reali. B. Il denominatore ha anche fattori complessi. C. Alcune applicazioni dell'integrazione delle funzioni razionali (caduta di un grave nell'aria, curva della marea, velocità delle reazioni chimiche).

9. Integrazione di certi differenziali contenenti funzioni lineari di x: integrazione dei differenziali binomi.

10. Integrali della forma

$$\int R(x, y)\,dx \quad \text{ove } y = \sqrt{ax^2 + 2bx + c}.$$

11. Integrazione mediante sviluppi in serie.

12. Integrali ellittici.

13 Differenziazione d'un integrale rispetto ad uno dei limiti; differenziazione ed integrazione rispetto ad un parametro.

14. Integrali euleriani di I e II specie.

15. Calcolo del contenuto di una porzione di superficie (quadratura).

Digitized by Google

16. Teorema della media. Valor medio di una funzione in un certo intervallo.

17. Calcolo della lunghezza degli archi di curve (rettificazione).

18. Volumi e superficie di corpi di rotazione.

19. Integrali doppi e tripli; calcolo del volume dei corpi (cubatura.)

20 Calcolo del contenuto di porzioni di superfice curve (complanazione).

21. Determinazione della massa di figure geometriche non omogenee; centro di massa (centro di gravità).

22. Determinazione di momenti d'inerzia.

23. Applicazione del calcolo integrale alla teoria del potenziale.

G. L.

GIULIO VIVANTI, *Esercizi di Analisi Infinitesimale*. 8° gr. p. VII-470. Pavia, Mattei & C. (Prezzo L. 15).

Col precente volume il chiaro autore porge un prezioso complemento alle sue *Lezioni di Analisi Infinitesimale* (cfr. *Bollettino*, T. XV, 1913, p. 109). Quali siano le norme che egli ha seguito nel comporlo risulta da alcune linee della prefazione, che giudichino opportuno di qui riferire.

" Due questioni fondamentali mi si affacciarono sin da principio: quale dovesse essere il carattere generale degli esercizi da scegliere: e se essi dovessero o no essere accompagnati dalla soluzione.

Quanto al primo punto, io avrei voluto cercar la maggior parte delle questioni da proporre nel vasto campo delle Matematiche applicate, e particolarmente della Meccanica e della Fisica, intese nel senso più ampio; ciò avrebbe reso più interessante lo studio del libro, ed avrebbe insinuata nei giovani la persuasione dell'utilità pratica di ciò che ad essi potrebbe altrimenti sembrare mera astrazione. Ma a far questo sarebbe stato necessario interpolare tutte quelle nozioni estranee alle Matematiche pure, che coloro i quali si dedicano ad un primo studio del Calcolo in generale non possiedono; il che avrebbe accresciuto di non poco la mole del libro, ne avrebbe alterato l'omogeneità, ed avrebbe aggiuntte nuove difficotà a quelle inerenti all'Analisi stessa. Ho pertanto rinunciato a tale idea, limitandomi a spigolare il più largamente possibile, nel campo della geometria la sola

Digitized by Google

scienza d'applicazione di cui si possa presumere una certa conoscenza negli allievi del primo biennio universitario.

Quanto al secondo punto, io penso che una collezione di esercizi, più che a fornire problemi agli studiosi, debba tendere ad insegnar loro la via di risolverli: e che l'idea di poter riscontrare nel libro la trattazione d'un problema, anzichè distogliere l'allievo dal tentarla per proprio conto, l'incoraggi anzi a farlo per la possibilità di controllare in fine il suo operato. Ho quindi fatto seguire ciascun esercizio della soluzione più o meno sviluppata a seconda dei casi „.

Riguardo al primo punto crediamo non vi sia alcuno che abbia un po' di conoscenza dello stato delle nostre scuole che non trovi essere il prof. Vivanti pienemente dalla parte della ragione. — Meno unanime sarà forse il consenso riguardo al secondo punto; chè di una qualsia regola non si può ritenere di avere il possesso pieno ed intero sinchè non la si sia applicata per proprio conto, senza la guida costante dell'insegnante; onde secondo noi, sarebbe stato ottimo consiglio il far seguive in ogni capitolo un certo numero di problemi da svolgersi completamente dall'alunno. Ciò osserviamo, non già per vano desiderio di critica, ma soltanto considerando che, siccome è certo che la raccolta del prof. Vivanti avrà in avvenire frequeti riedizioni, così l'A. potrà, ove lo voglia, darvi il complemento da noi chiesto e che sarebbe tanto ben accetto dai professori e tanto utile agli studenti.

Le questioni risolte raggiungono il cospicuo numero di 5 75 e sono assai bene scelte ed interessanti, alcune poi sono assolutamente nuove; nell'impossibilità di farne quì un'analisi particolareggiata, ci limitiamo a riferire i titoli delle varie parti dell'opera di cui si tratta:

Parte I. Preliminari analitici.

Parte II. Derivate ed integrali delle funzioni d'una variabile.

Parte III. Derivate ed integrali delle funzioni di più variabili.

Parte IV Applicazioni geometriche. A. Curve piane. B. Curve nello spazio. C. Superficie.

Parte V. Equazioni differenziali. A. Equazioni differenziali ordinarie. B. Equazioni a derivate parziali.

Parte VI. Elementi del Calcolo differenziale.

La perfetta concordanza di questo piano con quello delle *Lezioni di Analisi Infinitesimale* dello stesso autore prova che le

Digitized by Google

due opere formano un tutto omogeneo; una di esse trova nell'altra la propria base teorica, mentre questa contiene ampli sviluppi relativi alle teorie che costituiscono la prima.

G. L.

Frazioni continue.

O. PERRON, *Die Lehre von den Kettenbrüchen*. Leipzig und Berlin, Teubner, 1913. 8° p. XII + 520.

Non è un luogo comune il dire che quest'opera risponde ad un bisogno vivamente sentito. Nessuno ancora aveva pensato di raccogliere in uno speciale trattato i risultati di tre secoli di ricerche sulle frazioni continue; e pochi avrebbero potuto farlo con maggiore competenza del Perron, al quale sono dovuti notevoli contributi sull'argomento.

L'autore ha diviso la sua opera in due parti, l'una aritmetica (C. 1-5), l'altra analitica (C. 6-11).

Stabilite anzitutto le definizioni e le formole fondamentali (C. 1), egli considera particolarmente (C. 2) le frazioni continue *regolari*, cioè aventi i numeratori tutti eguali ad 1 ed i denominatori interi e positivi, accenna alla risoluzione per mezzo di esse delle equazioni indeterminate di primo grado, tratta della convergenza delle frazioni regolari infinite e delle proprietà dei loro quozienti approssimati; passa poscia (C. 3) alle frazioni regolari periodiche pure e miste ed allo studio degli irrazionali quadratici e dell'equazione di Pell. Il C. 4 è dedicato alle *frazioni continue di Hurwitz*, cioè a quelle frazioni continue regolari, la successione dei cui denominatori si ottiene alternando gli elementi d'un numero finito di progressioni aritmetiche d'ordine superiore; la proprietà fondamentale di tali frazioni continue è questa, che, se un numero irrazionale è rappresentabile con una frazione di Hurwitz, lo è pure qualunque sua funzione lineare (intera o fratta) a coefficienti interi. In frazioni continue di Hurwitz possono svilupparsi e ed e^2; e ciò conduce l'autore a trattare la questione dei caratteri specifici che presenta lo sviluppo in frazione continua d'un numero trascendente. La questione è ben lungi dall'essere completamente risolta; i soli risultati noti finora sono quelli ottenuti da Maillet intorno ai numeri da lui detti *di Liouville* e ad altri analoghi. La parte aritmetica termina (C. 5)

Digitized by Google

colla esposizione delle proprietà delle frazioni continue *semiregolari* e di alcuni loro tipi speciali.

Lo studio analitico delle frazioni continue si inizia (C. 6) colla considerazione delle trasformazioni che si possono far subire ad esse senza alterarne il valore *(contrazione, estensione)*, e dell'equivalenza tra frazioni continue e serie o prodotti infiniti. La convergenza e la divergenza delle frazioni continue vengono trattate diffusamente nel C. 7. Il C. 8 è dedicato in gran parte alle frazioni continue della forma:

$$1 + \frac{a_1 x \,|}{|\, 1} + \frac{a_2 x \,|}{|\, 2} + \cdots\cdots;$$

per ciascuna frazione infinita di questo tipo esiste, determinata in modo unico, una serie di potenze (*serie corrispondente*), che coincide, sino al termine in x^n incluso, collo sviluppo in serie di Taylor dell'n-esimo quoziente approssimato. La proprietà reciproca non sussiste sempre, nè v'è un legame necessario tra la convergenza della frazione continua e quella della serie corrispondente. Analogamente per una frazione continua della forma:

$$1 + \frac{k_1 x \,|}{|\, 1 + l_1 x} + \frac{k_2 x^2 \,|}{|\, 1 + l_2 x} + \frac{k_3 x^2 \,|}{|\, 1 + l_3 x} + \frac{k_4 x^2 \,|}{|\, 1 + l_4 x} + \cdots\cdots$$

esiste, determinata in modo unico, una serie di potenze (*serie associata*), che coincide, sino al termine in $x^2 n$ incluso, collo sviluppo dell'n-esimo quoziente approssimato; anche qui la proprietà reciproca non sussiste sempre. Nel C. 9 viene introdotto il concetto di *integrale di Stieltjes*; si dimostra che gli sviluppi in serie di certi integrali di questa specie ammettono una frazione continua associata ed una corrispondente. Cogli integrali di Stieltjes si connettono le frazioni continue della forma:

$$\frac{1 \,|}{|\, b_1 z} + \frac{1 \,|}{|\, b_2} + \frac{1 \,|}{|\, b_3 z} + \frac{1 \,|}{|\, b_4} + \cdots\cdots,$$

dove le b_i sono reali e positive; i quozienti approssimati d'ordine pari e quelli d'ordine dispari di una tale frazione hanno per limiti due integrali del tipo considerato, i quali hanno come corrispondente quella frazione continua, e, se $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ è divergente, coincidono. Il C. 10 è dedicato alla *tavola di Padé* contenente le funzioni razionali atte a dare la rappresentazione approssimata d'una funzione analitica, ed alle frazioni continue che si possono rica-

Digitized by Google

vare dalla tavola stessa. Infine il C. 11 studia le frazioni continue i cui elementi sono funzioni razionali dell'indice, ed i loro rapporti colle equazioni differenziali lineari.

L'esposizione della teoria è sempre accompagnata dallo svolgimento di numerosi ed interessanti esempi; e però noi non esitiamo a consigliare lo studio accurato di quest' opera a chiunque voglia famigliarizzarsi colla teoria delle frazioni continue.

G. VIVANTI

Matematica elementare.

TH. CARONNET, *Cours de trigonométrie.* 8° p. IV + 217. Paris, Gautier-Villars, 1912 (Prezzo fr. 4.50).

Questo trattato di trigonometria *piana*, benchè abbia un andamento conforme a quello adottato in opere congeneri anteriori pure si distigue per l' introduzione di qualche concetto moderno (come quello di *vettore*) e di qualche idea (ad es. quella di coordinate cartesiane) che molto riserbano per stadi posteriori dell' insegnamento. E le applicazioni fattene dall'autore mostrano l'opportunità di tale innovazione: essa, ad es., permette di stabilire molto semplicemente il " teorema del coseno „ per triangoli sferici e di dare i diagrammi delle linee trigonometriche. Molte applicazioni numeriche e una bella collezione di esercizi proposti raccomandano, oltre che la chiarezza dello stile e l'eleganza dei calcoli, questo volume all'attenzione degli insegnanti.

G. L.

N. AMICI e S. MEDICI, *Lezioni di Aritmetica ed Algebra* ad uso degli alunni del 1° biennio dell' Istituto Tecnico. I° volume (per il 1° corso). Rocca S. Casciano, L. Capelli, 1914, L. 3.50.

Gli A. dichiarano nella prefazione: " Lo scopo nostro è stato esclusivamente quello di compilare un libro di testo, nel quale gli alunni potessero ritrovare le lezioni udite nella scuola, e come tale chiediamo ai colleghi di giudicarlo. In base a questo criterio fondamentale, la materia è limitata a quanto noi crediamo possibile e doveroso svolgere nel primo biennio d'Istituto, dati i programmi attuali, e data la preparazione degli alunni „.

Digitized by Google

Ed il libro corrisponde esattamente al programma tracciato dagli A. È quindi veramente, direi meglio *sinceramente* un libro di testo *scritto per gli alunni*, da insegnanti che conoscono profondamente la scuola, le sue esigenze e le sue condizioni reali ed attuali. L'adozione di queste *Lezioni* non richiederà perciò da parte dell'insegnante una opera di semplificazione, di sfrondamento, di amputazione che diminuisca o renda nullo affatto il sussidio del libro di testo.

La linea sobria e semplice del libro non nuoce però al rigore del metodo, che anzi è spinto fino ai limiti imposti dalle necessità didattiche. Di queste si è sempre tenuto il massimo conto: così ad esempio sono opportunamente introdotti tre postulati non strettamente necessari, si è fatto uso il meno possibile del Post. d'induzione e non sono adottate le Df.[i] di somma, prodotto ecc. per mezzo delle loro leggi di formazione come in Peano.

Poche e lievi mende — inevitabili in una prima edizione — sono da notarsi. Dopo poche parole di introduzione, la materia è esposta secondo l'ordine tradizionale. Però, con qualche cambiamento di pochissima importanza, si può far seguire al 1° cap. quello dei numeri relativi, anticipando anche, in parte, lo svolgimento del calcolo letterale. Tale spostamento mi sembra consigliabile, principalmente per evidenti ragioni didattiche.

I numeri delle varie specie sono considerati come enti astratti.

Ma accanto alla costruzione puramente logica delle varie teorie è posta l'applicazione alla misura delle grandezze, come questione oggettiva che giustifichi insieme e suggerisca le successive estensioni del concetto di numero.

Tale applicazione, sparsa in tutto il libro, non fa però parte integrante della trattazione teorica. Riterrei opportuno, appunto perciò, — usando magari caratteri tipografici diversi — metter maggiormente in luce tale indipendenza e render all'alunno più facile il riunire tutto quanto si riferisce alla teoria della misura.

Detto questo, esporrò brevemente lo svolgersi delle varie teorie, accompagnandole colle poche osservazioni che possono essere fatte.

Nel Capitolo I°, seguendo Peano, si ammettono i tre concetti primitivi: *zero*, *numero intero assoluto*, *successivo di numero intero assoluto*, e si definisce il concetto di *precedente*. A questi concetti sono attribuite le proprietà espresse dal seguente sistema di postulati, con lieve variante sul sistema di Peano: I° *Lo zero è un*

Digitized by Google

numero; II° *Esiste il successivo di un numero ed è pure un numero*; III° *Lo zero non è il successivo di alcun numero*; IV° *Ogni numero non può avere che un solo successivo ed un solo precedente.*

Mercè questi Post. viene così a formarsi la serie dei numeri interi. Ai quattro postulati precedenti che fissano essere la serie bene ordinata, è aggiunto il Post. d'induzione completa.

Dopo ciò è considerata l'uguaglianza dei numeri interi ass. (uguaglianza logica) e le tre proprietà formali.

Definita la somma $a + 1$ e la somma di più unità si dimostra (pag 10), per mezzo del Post. d'induzione, che *ogni numero, eccetto 0 ed 1, è somma di più unità*, il qual teor. viene così in seguito, quasi semprre, a sostituire nelle dimostrazioni il Post. d'induzione. Data la forma scelta pel Post. d'induzione (negli esercizi sono citate dizioni diverse), non appare però ben chiara la sua applicazione alla dimostrazione di questo teor.

Dopo questa trattazione puramente logica è contenuto un lieve accenno (pag. 10. 11) al concetto di gruppo, corrispondeza biunivoca tra gruppi che conduce al concetto di num. cardinale, ed alla sua corrispondenza con quello di ordinale. Su tale punto una osservazione: ritengo conveniente non usare la parola *gruppo* nel senso di *aggregato* od *insieme.*

È postulato poi (giustificando colla corrispondenza tra gruppi e numeri) la proprietà comm. dell'addizione, dopo di che è stabilito il concetto di $>$ e $<$.

Ugualmente per ragioni didattiche, è assunta come post. la proposizione che le ipotesi $a > b$ e $a = b$; $a < b$ sono disgiuntive, e quindi è sviluppata tutta la teoria dei numeri interi assoluti. In fine del Cap. è accennato alla corrispondenza tra numeri e grandezze discontinue.

Nei Cap. II° e III° è contenuto, nei limiti più ristretti possibili, un cenno sui sistemi di numerazione (riferendosi a quello decimale), sulla divisibilità, *M. C. D*, *M. C. M*, numeri primi tra loro e numeri primi.

Per la teoria della divisibilità anche senza alterare menomamente le proporzioni fissate, magari al solo scopo di dare maggiore chiarezza e concisione agli enunciati, farei uso della nozione di congruenza.

Il Cap. IV° contiene la teoria dei numeri razionali. Dopo brevi considerazioni sui segmenti commensurabili e sulla genesi intuitiva del numero frazionario, il nuovo concetto di num. è definito

Digitized by Google

per astrazione da una coppia (deve dirsi *concetto astratto* o *funzione* di una coppia) di num. interi in ordine ad un dato significato di uguaglianza. L'uguaglianza, somma, prodotto sono definite secondo Stoltz e giustificate con riferimento ai segmenti.

Nel Cap. V° sono esposti i numeri relativi. Non mi sembra che quella scelta pei numeri relativi sia, a tutto rigore, una definizione: può interpretarsi invece come presentazione di un nuovo simbolo aritmetico, la cui genesi intuitiva è accennata nelle questioni oggettive che la accompagnano, ed il cui significato logico è precisato dalle Df.ⁱ e proprietà che saranno poi stabilite. La somma e prodotto sono definite, come pei numeri razionali.

Una sola osservazione su questo Cap.: è bene far precedere la dimostrazione della esistenza, alle Df.ⁱ di differenza e quoz. di numeri relativi. Altrettanto dicasi pel quoz. di razionali.

In questo Cap. e nel precedente la trattazione è chiara, semplice e ridotta ai punti essenziali; ciò che costituisce un pregio che sa apprezzare chiunque abbia pratica dell'insegnamento secondario ed in ispecial modo negli istituti tecnici.

Nei Cap. VI° e VII° infine sono contenuti gli elementi di calcolo letterale, regola di Ruffini e sue applicazioni, casi più semplici di decomposizione di polinomi, frazioni algebriche, equazioni, equazioni di 1ª grado, sistemi di equaz. di 1° grado, problemi. Anche in questi Capⁱ è da notarsi la consueta chiarezza e brevità.

Il libro è corredato da una copiosissima - 1751 - raccolta di esercizi, corrispondenti alle diverse parti del testo.

Alcuni (ad es: teor. di Fermat, Wilson ecc.) rappresentano un complemento alla trattazione del testo: la grandissima maggioranza invece sono vere esercitazioni sulle teorie svolte, e danno modo all'alunno volonteroso di addestrarsi e rendersi esperto nel calcolo algebrico.

Concludendo: è un libro fatto con coscienza ed abilità, con sicura conoscenza e profondo amore della scuola; un testo che sarà di vera utilità per gli alunni e per l'insegnante. Le poche e lievissime mende, forse da me troppo minuziosamente ricercate — inevitabili in ogni testo, specialmente se alla prima edizione — possono facilmente esser rilevate da ogni insegnante.

Ad ogni modo non sono tali da turbare l'organicità, il metodo, da diminuire i meriti del libro. A ciò porta a concludere l'esame accurato e sopratutto — ciò che costituisce la prova del fuoco pei libri di testo — l'esperienza nella scuola.

EGIDIO GENNARI

Digitized by Google

Pubblicazioni recenti sulla Storia della matematica.

A. Favaro, *François Blondel et ses études sur les « Nuove Scienze » de Galilée* (Revue des questions scientifiques 1913).

Benchè questo interessante articolo non appartenga alle serie biografiche con cui il Favaro illustra tutto l'« entourage » di Galileo, pure lo scienziato del quale ivi principalmente si discorre è un astro del sistema planetario avente per centro il celebre fisico fiorentino; giacchè il Blondel non solo proseguì nelle vie da questo aperte, ma fu legato da sincera amicizia a V. Viviani. Di lui il Favaro narra la vita ed esamina a fondo l'opera scientifica.

A. Favaro, *Per la biografia di Niccolò Tartaglia* (Archivio storico italiano 1913). *Di Niccolò Tarnaglia e della stampa di alcune sue opere con particolare riguardo della « Travagliata Inventione »*. (Isis, 1913).

Questi due articoli rappresentano il frutto di estese ricerche archivistiche; fra i risultati di esse ci limitiamo a rilevare che, secondo il Favaro, a torto alcuni storici attribuiscono al Tartaglia il cognome di *Fontana* che non gli spetta.

A. Favaro, *Amici e corrispondenti di Galileo Galilei* XXX *Niccolò Aggiunti* (Atti del R. Istituto Veneto T. LXXIII. 1913).

Lo scienziato considerato nel presente lavoro nacque a Borgo S. Sepolcro il 6 Dicembre 1600 e morì a Pisa, ove occupava il posto di professore universitario, il 6 Dicembre 1635. Legato di vincoli di devota amicizia a Galileo a lui fu di aiuto negli ultimi anni della sua esistenza. La scoperta del fenomeno di capillarità ed altre ricerche inedite di cui il Favaro dà notizia, stanno a provare che l'Aggiunti avrebbe potuto contribuire efficacemente al progresso delle scienze fisico-matematiche ove non fosse morto nel fiore degli anni.

Antonio e Giuseppe Favaro. *A proposito dei tre primi Quaderni di Anatomia di Leonardo da Vinci pubblicati da Ove C. L. Vangensten, A. Fonahn, H. Hopstock.* (Atti del R. Istituto Veneto T. LXXIII, Parte 2ª).

Dopo di avere passate in rassegna le parziali pubblicazioni sinora fatte dei Mss. anatomici di Leonardo da Vinci conservati

Digitized by Google

nel Palazzo Reale di Windsor, gli autori analizzano a fondo l'edizione completa intrapresa di tre dotti norvegesi, i cui nomi sono indicati nel titolo; vengono da ultimo fatte alcune osservazioni relative all'edizione nazionale di tutte le opere di quel Grande che il Governo italiano da qualche tempo affidò ad apposita Commissione.

A. Favaro, *Serie centesima terza di scampoli galileiani.* Atti e Memorie dell'Accademia di Padova, T. XXX 1913.

CXLV. Dal Carteggio di Cesare Guasti. CXLVI. Galileo e Guidobaldo del Monte. CXLVII. Galileo oppure Huygens ?. CXLVIII. Contribuzioni alla Iconografia Galileiana.

A. Favaro, *Nuove ricerche per una iconografia galileiana.* Atti del R. Istituto Veneto, T. LXXIII, 1913-14.

Nuove ed importanti aggiunte ad un lavoro precedente.

C. Pitollet, *Pour la biographie critique de Guillaume Libri: Le Comte Georges Libry falsificateur de lettres de change d'après le Dossiers de ses procès à Lyon en 1813 et 1815-16.* Il libro e la stampa, Anno VII, 1913, p. 4-54, 165-188, 238-268.

Lavoro eruditissimo e documentatissimo, il quale lumeggia, in modo sinistro, la figura del padre del famoso storico delle matematiche in Italia durante i primi 34 anni della sua vita; se esso debba dirsi un contibuto alla " biografia critica „ di Guglielmo Libri è questione su cui per fermo non tutti si troveranno essere d'accordo.

E. Bortolotti, *I primordi della teoria generale dei gruppi di operazioni e la dimostrazione data da Paolo Ruffini della impossibilità di risolvere con funzioni trascendenti esatte le equazioni algebriche generali di grado superiore al quanto.* (Mem. della R. Accademia di Modena, III Ser., T. XII 1913).

Riassunto critico di due memorie del Ruffini da cui risulta che la dimostrazione indicati nel titolo è pienamente rigorosa ed identica sostanzialmente a quello che porta il nome di Wantzel L'a. ha anchè utilizzato un opuscolo del Ruffini tuttora inedito e che apparirà nell' edizione delle *Opere complete* di questo alla quale da tempo egli attende.

F. Cajori, *History of the exponential and logaritmic concepts.* The American Mathematical Monthly, T. XX. 1913.

Ecco un breve sommario di questo lavoro: I Da Nepero a Libniz e Giovanni I. Bernoulli (1614-1712). II Da Libniz e Giovanni I. Bernoulli ed Eulero (1712-1747). III Creazione per opera

Digitized by Google

di Eulero di una teoria di logaritmi dei numeri complessi (1747-1749). IV Da Eulero a Wessel ed Argand (1749-1800 circa) V. Generalizzazione e progressi compiuti durante il sec. XIX.

JOSEPHINE E. BURNS, *The fundation period in the history of group theory.* Ivi.

G. A. MILLER, *Errors in the literature on groups of finite ordes.* Ivi.

Gli errori registrati furoro commessi da Cayley, Jordan Weber, ecc.

W. C. EELLS, *Number systems of the North American Indians.* Ivi.

L. C. KARPINSKI *The algebra of Abu Kamil.* Id. Vol. XXI 1914.

Sommario: Popolarità dell'algebra fra gi Arabi. Il primo grande scrittore d'algebra fra gli Arabi. Il secondo grande scrittore. Le opere di Abu Kamil. Fonti di notizie. Citazioni dal ms. I tre tipi di equazionioni quadratiche Moltiplicazione e divisione Problemi. Problemi sulle frazioni. Trattato sopra il pentagono ed il decagono.

Notizie.

TEMA PROPOSTO DALLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI DANIMARCA. « Le curve d'errore asimmetriche e le leggi da esse rappresentate avevano tratta, or sono circa quarant'anni, l'attenzione dei matematici danesi; in seguito, specialmente grazie ai lavori di K. Pearson, esse hanno ricevuto molte applicazioni in ricerche statistiche e biologiche. L'utilità pratica di tali curve, che oggi si abbracciano spesso sotto il nome di curve di frequenza (" frequency curves „) e curve di ripartizione, è dunque universalmente riconosciuta. Quanto alle ricerche intorno alle proprietà fondamentali delle curve in questione, sulla possibilità di caratterizzarle col mezzo di un gruppo di numeri distinti (quali sarebbero in semi-invarianti di Thiele), sopra la legittimità delle approssimazioni di cui ci si serve di consueto nelle applicazioni e finalmente sopra le ragioni dell'applicazione delle curve di frequenza nella teoria delle osservazioni, esse non vennero sinora condotte a buon termine. Tuttavia tali studi teorici non soltanto sono il fondamento indispensabile per le applicazioni, ma con ogni probabilità darebbero dei risultati interessanti anche dal punto di vista delle matematiche pure. In vista di tutto cio l'Accademia propone il seguente tema di concorso:

Digitized by Google

Valutare, mediante uno studio comparativo e critico, quanto la letteratura contiene d'importante sopra la teoria delle curve di frequenza e dare qualche contributo nuovo ed importante allo sviluppo della teoria generale di tali curve e della sua pratica applicazione.

Premio una medaglia d'oro del valore di 440 franchi (320 corone) scadenza 31 Ottobre 1915. I lavori dei concorrenti dovranno essere presentati anonimi e redatti in una delle seguenti lingue: Danese, Danese-Novegese, Svedese, Inglese, Tedesco, Francese o Latino.

*
* *

Carteggio di Eulero. La Commissione che dirige la pubblicazione delle opere del grande analista svizzero ha pubblicato un Indice, compilato di G. Eneström, delle lettere finora raccolte, scritte da lui od a lui dirette dal 1726 al 1741. Ed ora rivolge viva preghiera a tutti coloro che sono in grado di farlo, di comunicare notizie di altre lettere congeneri appartenenti al detto periodo, nonchè informazioni sopra il carteggio euleriano durante gli anni 1741-1783; tali comunicazioni vanno dirette al Prof. Dott. F. Rudio, Zürich, Donderstrasse 111.

*
* *

Il vii centenario della nascita di R. Bacone venne solennemente ricordato con un volume collettivo pubblicato per cura di A. G. Little (*Rogen Bacon Essays contribueted by various writers on the occasion of the commemoration of the seventh centenary of his birth:* Oxford 1914), nel quale le varie facie dell'attività scientifica del celebre « doctor mirabilis » sono esaminate da specialisti competenti. Dei lavori matematici si occupò con profondità e larghezza D. E. Smith nel saggio " The place of Roger Bacon in the history of mathematics ".

Digitized by Google

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E STORIA

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

ANNO XVI, Fasc. IV: **Ottobre, Novembre e Dicembre** 1914

ALCUNE VEDUTE GENERALI

DELLA GEOMETRIA MODERNA

del Prof. E. J. WILCZYNSKI

(Trad. dal Bull. Amer. Math. Soc., vol 19, n. 7, april 1913).

[*Ho creduto opportuno tradurre per il* BOLLETTINO *il presente articolo del Prof. E. J. Wilczynski, uno degli iniziatori della geometria proiettivo-differenziale, per facilitarne la lettura ad un pubblico più vasto. In questo scritto è ben fissato il problema fondamentale della rappresentazione analitica, invariante rispetto al gruppo proiettivo, di una varietà o meglio l'interpretazione geometrica di un sistema di equazioni a derivate parziali completamente integrabile. Il Prof. Wilczynski, aderendo cortesemente ad una mia richiesta, ha compilato espressamente per questa traduzione una lista dei lavori pubblicati sull'argomento e sotto la sua direzione dopo la stampa del suo libro « Projective-differential Geometry of curves and ruled surfaces » (Teubner, 1906). Ho completato questa lista con l'aggiunta dei lavori pubblicati in Italia dopo il 1912: di quelli precedenti si può trovar notizia nella mia conferenza sopra i « Recenti progressi nella geometria proiettiva differenziale degli iperspazi » (V. Congresso internaz. dei Matem., Cambridge 1912). Io spero, con la pubblicazione di queste due conferenze, di aver facilitato l'orientamento di chi volesse dedicarsi a questo nuovo ed interessante ramo di geometria.*

E. BOMPIANI].

. . . . . .

. . . . . .

La distinzione fra analisi e geometria, per quanto comoda è in realtà superficiale o per alcuni riguardi ingiuriosa. L'invenzione della geometria analitica ci ha insegnato sopratutto questo: che ogni problema d'analisi è suscettibile d'interpretazione geometrica, e ad ogni problema geometrico si può dar veste analitica.

Digitized by Google

È mia convinzione personale che nessuna ricerca matematica è completa se non ne risaltano gli esistenti legami fra i due suoi aspetti: analitico e geometrico. Talvolta l'intuizione geometrica ha condotto in errore: ciò non è men vero di alcune intuizioni prime degli analisti. *Ogni* idea intuitiva dev'esser sottoposta a critica rigorosa. La geometria obbedisce alle stesse regole di logica dell'analisi e se presso alcuni è caduta in discredito ciò si deve al fatto che vaghe e grossolane intuizioni geometriche vengono paragonate, a loro evidente svantaggio, a raffinate teorie analitiche e non alle corrispondenti forme imprecise d'intuizione analitica.

Ma indipendentemente da ogni questione di rigore è estremamente importante che i teoremi si presentino non soltanto come conseguenza di lunghi e complicati ragionamenti. Noi non possediamo realmente una verità, non ne abbiamo penetrato il significato, s'essa non ci apparisce da qualche punto di vista come ovvia ed intuitiva. E la geometria fornisce spesso il miglior mezzo per rendersi esatto conto in modo intuitivo di una teoria matematica. Ciò è vero non soltanto nel caso di analogie banali, ma anche in quei casi in cui una intuizione non esercitata e grossolana aveva già condotto altri in errore. Così p. es. il teorema sulla convergenza uniforme acquista, nella forma geometrica datagli da Osgood, una forza persuasiva non raggiungibile con procedimenti analitici, mentre il contenuto logico è lo stesso nelle due esposizioni.

Non vi è secondo me distinzione essenziale fra analisi e geometria. Se tuttavia nel titolo di questa comunicazione ho usato la parola " geometria „ ciò è perchè secondo la classificazione tradizionale gli argomenti dei quali qui intendo parlare appartengono alla geometria.

La particolare efficacia delle nozioni geometriche nell'illustrare un soggetto astratto ha dato origine ad un sorprendente paradosso. La geometria analitica insegna ad associare ad ogni punto del piano e dello spazio una coppia e risp. una terna di numeri, le *coordinate* del punto. Il desiderio di un'analogia completa fra geometria e analisi ha condotto alla nozione di punto in uno spazio ad n dimensioni come rappresentante di un sistema di n numeri $(x_1, x_2, \ldots x_n)$. Per quanto noi non possediamo una intuizione primitiva della proprietà di uno spazio ad n dimensioni parliamo tuttavia di curve, di superficie, etc. di

Digitized by Google

un tale spazio e le analogie indicate dal linguaggio geometrico hanno un enorme valore suggestivo per l'analisi. Così, ed in ciò sta il paradosso accennato, noi facciamo uso di un'idea astratta come quella di uno spazio ad n dimensioni (del quale ci manca un'intuizione diretta) per rendere intelligibile una cosa ben concreta com'è un sistema di n variabili.

La nozione di spazio ad n dimensioni S_n è ormai parte essenziale del patrimonio matematico. Le prime traccie se ne trovano negli scritti di parecchi matematici della fine del XVIII e del principio del XIX secolo; specialmente in Gauss ed in Cauchy. Tuttavia la nozione completa, con ciò che di essenziale vi è connesso, si deve a Grassmann, la cui prima « Ausdehnungslehre » (1844) è dedicata principalmente a questo soggetto.

Sembrerebbe a primo aspetto che la dimensione di uno spazio fosse il suo carattere più importante e che non fosse possibile considerarlo in due modi diversi così da attribuirgli due dimensioni diverse. E sembrerebbe anche vano di associare una vera intuizione geometrica ad una nozione così astratta come quella di uno S_n. Eppure io credo che se il nostro modo di pensare fosse totalmente astratto queste questioni non si sarebbero mai presentate ad alcuno. Partendo da un altro punto di vista esse hanno ricevuto risposta affermativa così evidente da sembrar quasi triviale. Due geometri dell'inizio del XIX sec., Poncelet e Gergonne, scoprirono il principio oggi detto di dualità, secondo il quale da ogni teorema di geometria proiettiva nello spazio se ne ricava un altro con lo scambio delle parole punto e piano e lasciando inalterata la parola retta. Risultò con ciò chiaro che per la geometria proiettiva punto e piano sono due nozioni coordinate. Alle curve e superficie pensate fino allora come luoghi di punti vennero aggiunte le nozioni correlative di aggregati ad una e a due dimensioni di piani e i loro inviluppi. Così come conseguenza del principio di dualità fu introdotto per la prima volta un elemento diverso dal punto, il piano, come generatore di figure geometriche. La dimensione dello spazio rimaneva però la stessa sotto i due punti di vista. Anzi questo solo esempio di cambiamento dell'elemento generatore era troppo isolato e speciale per suggerire una facile e feconda generalizzazione. Un gran passo fu perciò quello compiuto da Plücker, nel 1846, che assunse la retta come elemento generatore dello spazio e ne introdusse le coordinate; perchè qui per la prima

Digitized by Google

volta siamo indotti a considerar lo spazio come un aggregato a quattro dimensioni, contro l'idea che la dimensione sia un carattere geometrico intrinseco dello spazio. E qui troviamo pure l'origine di tutte quelle generalizzazioni della geometria moderna in cui non soltanto il punto, il piano, e la retta, ma qualsiasi ente geometrico può essere assunto come elemento generatore. Nulla è oggi più facile che rappresentarsi in modo concreto sul piano una geometria ad un numero qualunque di dimensioni.

Particolarmente importante è la scelta dell'elemento generatore per caratterizzare alcuni particolari rami di ricerca geometrica. Cambiando quest'elemento uno stesso teorema analitico può ricevere più interpretazioni geometriche completamente differenti. Il principio di dualità, al quale si è alluso poco fa, fornisce la più nota illustrazione del nostro asserto. Un sistema di teorie geometriche equivalenti ci è fornito dalla geometria della retta di Plücker, dalla geometria della sfera di Lie, e dalla geometria, di una quadrica (a quattro dimensioni) immersa in uno spazio a cinque dimensioni. Così anche, da un punto di vista astratto, è la stessa cosa parlare di uno spazio (lineare) a cinque dimensioni, della totalità delle coniche del piano, o di quella dei complessi lineari di rette nello spazio. Ma il contenuto geometrico è molto differente nei diversi casi. Neppure in una determinata ricerca è sempre desiderabile di mantenere lo stesso ente geometrico come elemento generatore dello spazio. In realtà, uno dei risultati più fecondi dell'opera di Plücker e dei suoi successori è l'aver messo in luce la grande arbitrarietà nel mutare l'elemento generatore quando ciò convenga.

Supponiamo di aver fissato un determinato ente come elemento generatore; se occorrono k numeri per fissarlo completamente noi, d'accordo con quanto precede, lo diremo " punto " di uno spazio o varietà a k dimensioni, chiamando spazio o varietà l'aggregato di tutti questi elementi. Questo " spazio " può godere della proprietà di contenere per intero la retta congiungente due dei suoi punti (1): in tal caso si dice che lo spazio è *lineare* (2). Tali sono per es. la totalità a due dimensioni dei punti

(1) S'intende premessa una definizione della parola « retta ». Non possiamo qui addentrarci in questioni di dettaglio.

(2) [In italiano si omette l'aggettivo « lineare » intendendolo già compreso nell'uso della parola « spazio »; mentre si riserva il nome di « varietà » a k dimensioni ad una totalità ∞^k di elementi. — N. d. T.].

Digitized by Google

di un piano, quella a tre dimensioni dei punti dello spazio, quella a cinque dimensioni delle coniche del piano. La totalità dei punti di una superficie curva costituisce un esempio di una varietà non lineare. Una tal superficie può immaginarsi immersa in uno spazio lineare, per es. a tre dimensioni, ed è anzi in questa guisa che noi la consideriamo abitualmente. Analogamente, se una varietà a k dimensioni non è lineare noi diciamo ch'essa è immersa in uno spazio ad n ($> k$) dimensioni se esiste uno S_n che la contiene, ma non uno spazio di dimensione inferiore. I punti di un S_n si rappresentano mediante n coordinate $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Se la totalità dei punti che vogliamo rappresentare è a k dimensioni possiamo pensare che le dette coordinate soddisfino ad $n - k$ equazioni fra loro indipendenti e tali che nessuna di esse sia lineare (senza di che la nostra varietà sarebbe contenuta in uno spazio di dimensione minore). In moltissimi casi queste equazioni sono algebriche.

Nel linguaggio iperspaziale: si tratta di una varietà a k dimensioni V_k immersa in uno spazio ad n dimensioni. Essa è rappresentata da $n - k$ equazioni algebriche indipendenti

$$(1) \qquad f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n - k)$$

nessuna delle quali è di primo grado [1].

Se non v'è alcuna equazione da soddisfare ogni punto dell'S_n appartiene all'ente geometrico che si studia. Ogni sistema di valori $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ rappresenta un punto; più sistemi rappresentano più punti. L'interesse nasce quando si ha a che fare con un numero infinito di punti. Se la varietà è analitica le coordinate dei suoi punti sono esprimibili nella forma:

$$(2) \qquad x_1 = \varphi_1(u_1, \ldots, u_r), \ldots, x_n = \varphi_n(u_1, \ldots, u_r)$$

ove le φ sono funzioni analitiche dei loro argomenti, ed r è un intere qualsiasi fra 1 ed n. Se $r = 1$ si ha una varietà ad una dimensione o curva, semplice infinità di punti dello S_n. Se $r = 2$ si ha una varietà a due dimensioni o superficie dello S_n. In ogni caso si ha una varietà analitica dello spazio ad n dimensioni che per $r = n$ coincide con lo S_n stesso o con una sua parte.

---

[1] Se la V_k dev'essere algebrica irriducibile possono occorrere più di $n - k$ equazioni per caratterizzarla completamente.

Digitized by Google

L'uso di tre sole coordinate per un punto dello spazio ordinario introduce delle complicazioni per l'ufficio eccezionale dei punti all'infinito. Si evita questa difficoltà introducendo le cosidette coordinate omogenee. Lo stesso vantaggio consiglia di servirsi di coordinate omogenee negli iperspazi. Introduciamo un sistema di $n+1$ numeri $y_1, y_2, \ldots y_{n+1}$ legati alle x dalle relazioni

$$x_1 = \frac{y_1}{y_{n+1}}, \quad x_2 = \frac{y_2}{y_{n+1}}, \ldots, x_n = \frac{y_n}{y_{n+1}}.$$

Le y, delle quali non interessano che i rapporti si dicono coordinate omogence del punto. Le coordinate di un punto della varietà saranno del tipo:

$$(3) \quad y_1 = \varphi_1(u_1, \ldots, u_r), \; y_2 = \varphi_2(u_1, \ldots, u_r), \ldots, y_{n+1} = \varphi_{n+1}(u_1, \ldots, u_r),$$

ed è, naturalmente, indifferente moltiplicarne tutt'i membri a destra per una stessa funzione $\lambda(u_1, \ldots, u_r)$ perchè con ciò rimangono inalterati i rapporti delle y.

Di più si può supporre che le y siano tutte linearmente indipendenti perchè in caso contrario avremmo da operare invece che sopra uno S_n sopra uno spazio di dimensione minore.

Vogliamo ora mostrare che è sempre possibile trovare un sistema di equazioni differenziali lineari ed omogenee delle quali $y_1, y_2, \ldots y_n$ formano una soluzione fondamentale, nel senso che la più generale soluzione del sistema è del tipo

$$(4) \qquad y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_{n+1} y_{n+1}$$

ove le c sono costanti arbitrarie.

La verità dell'asserto è palese per $r = 1$. L'ente geometrico che si studia è una curva di S_n, e le y_i sono soluzioni di una equazione differenziale lineare ed omogenea di ordine $n+1$

$$(5) \qquad \frac{d^{n+1} y}{d u^{n+1}} + p_n(u) \frac{d^n y}{d u^n} + p_{n-1}(u) \frac{d^{n-1} y}{d u^{n-1}} + \ldots$$

$$+ p_1(u) \frac{d y}{d u} + p_0(u) y = 0$$

la cui soluzione generale è data dalla (4).

Digitized by Google

Se $r > 1$ dovremo considerare equazioni alle derivate parziali. Una funzione di r variabili indipendenti ha r derivate parziali del primo ordine, $\frac{1}{2} r(r+1)$ del secondo, ..., $\frac{r(r+1)\ldots(r+k-1)}{k!}$ di ordine k. Consideriamo la funzione stessa come sua derivata di ordine zero. Esistono quindi

$$(6) \qquad p_k = 1 + \sum_1^k \frac{r(r+1)\ldots(r+i-1)}{i!}$$

derivate parziali di una y_i $(u_1, \ldots, u_r)$ di ordine non superiore a k. Questo numero cresce molto rapidamente con k e si può sempre scegliere k in modo che superi $n+1$ (n è la dimensione dello spazio). Se la nostra V_r non degenera in una V_{r-1} non è possibile che le y_i soddisfino tutte ad una stessa equazione alle derivate parziali del primo ordine

$$A\,y + B_1 \frac{\partial y}{\partial u_1} + \ldots + B_r \frac{\partial y}{\partial u_r} = 0,$$

perchè se ciò fosse i rapporti delle y_i sarebbero funzioni di $r-1$ combinazioni (al più) delle $u_1, u_2, \ldots, u_r$, e si tratterebbe di una V_{r-1} (al più).

Possono invece tutte le y_i esser soluzioni di una o di più equazioni del secondo ordine. Se queste sono in numero di $\frac{1}{2} r(r+1)$ (indipendenti) tutte le derivate del secondo ordine possono esprimersi nella forma

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u_i \partial u_k} = A_{ik}\,y + B_{ik}^{(1)} \frac{\partial y}{\partial u_1} + \ldots + B_{ik}^{(r)} \frac{\partial y}{\partial u_r}$$

$$(i, k = 1, 2, \ldots, r)$$

e quindi anche tutte quelle di qualsiasi ordine più elevato.

La più generale soluzione analitica di un tale sistema è, come risulta evidente, una combinazione lineare omogenea a coefficienti costanti di $r+1$ soluzioni indipendenti, cioè la nostra V_r è contenuta in uno spazio lineare ad r dimensioni. Poichè abbiamo chiamato S_n lo spazio d'immersione, questo caso non può presentarsi che per $r = n$.

Digitized by Google

In generale le y_i soddisfaranno meno di $\frac{1}{2} r(r+1)$ equazioni linearmente indipendenti del secondo ordine forse anche nessuna). Se $\frac{1}{2} r(r+1) - s$ è il loro numero noi possiamo considerare y_i le derivate prime ed s delle sue derivate seconde come linearmente indipendenti, mentre le rimanenti sono esprimibili linearmente ed omogeneamente per mezzo di queste $1 + r + s$ quantità (i coefficienti nelle combinazioni lineari possono essere funzioni delle u). Se $1 + r + s$ è minore di $n+1$ prendiamo in esame le derivate di terz' ordine. Supponiamo queste esprimibili linearmente ed omogeneamente per mezzo delle precedenti $1 + r + s$ ed inoltre di t derivate terze. Così continuando si arriverà ad esprimere le derivate fino a quelle di un certo ordine k linearmente ed omogeneamente per mezzo di $1 + r + s + \ldots + w$ di esse (indipendenti) e tale che

$$1 + r + s + \ldots + w \geq n + 1$$

Ciò è certamente possibile, perchè se non lo fosse si potrebbero esprimere le derivate di qualsiasi ordine linearmente ed omogeneamente per mezzo di un numero di esse (indipendenti) minore di $n+1$, cioè la varietà sarebbe immersa in uno spazio di dimensione minore di n, contro l'ipotesi.

D'altra parte la somma $1 + r + s + \ldots + w$ non può superare $n+1$. Infatti se ciò fosse la varietà non potrebbe esser contenuta in uno S_n. Si deve aver quindi

$$1 + r + s + \ldots + w = n + 1 . \tag{8}$$

Abbiamo così costruito un sistema di equazioni differenziali lineari ed omogenee cui soddisfano le y_i composto di $\frac{1}{2} r(r+1) - s$ equazioni di secondo ordine, di $\frac{1}{3!} r(r+1)(r+2) - t$ del terzo e di $\frac{1}{k!} r(r+1)\ldots(r+k-1) - w$ di ordine k. In generale queste equazioni e quelle che se ne ottengono per derivazioni permettono di esprimere le derivate di ordine $k+1$, e quindi quelle di ordine superiore, linearmente ed omogeneamente per mezzo di $n-1$ indipendenti di ordine inferiore. Se però alcune

Digitized by Google

delle derivate di ordine $k+1$ non potessero ricavarsi per questa via sarà possibile aggiungere altre equazioni, in numero sufficiente, che le determinano in funzione delle stesse $n+1$ quantità indipendenti.

I coefficienti di questo sistema saranno funzioni analitiche delle u e la soluzione generale è della forma

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_{n+1} y_{n+1} \tag{9}$$

ove le c sono costanti arbitrarie.

Un tal sistema di equazioni alle derivate parziali si dice completamente integrabile.

È chiaro che inversamente, dato un sistema completamente integrabile le sue soluzioni che formano un sistema fondamentale possono interpretarsi come coordinate di un punto che descriva una V_r in uno S_n. Rimane così dimostrato che ad ogni V_r immersa in uno S_n corrisponde un sistema di equazioni a derivate parziali completamente integrabile, la cui soluzione generale contiene $n+1$ costanti arbitrarie, e viceversa.

Questo risultato può esser meglio precisato. Non è la sola varietà da cui siamo partiti che soddisfa al nostro sistema, ben sì ogni altra le coordinate dei cui punti siano della forma

$$\begin{aligned} \bar{y}_1 &= c_{11} y_1 + c_{12} y_2 + \ldots + c_{1,n+1} y_{n+1} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \bar{y}_{n+1} &= c_{n+1,1} y_1 + c_{n+1,2} y_2 + \ldots + c_{n+1,n+1} y_{n+1} \end{aligned} \tag{10}$$

ove le c_{ik} sono costanti arbitrarie a determinante non nullo.

Anzi di più, poichè sappiamo che l'integrale generale è della forma (9) non possono esistere altre varietà rappresentanti del nostro sistema che quelle del tipo (10). Ora le (10) interpretate come formole di passaggio dalle y_i alle $\bar{y}_i$ rappresentano la più generale trasformazione proiettiva dello S_n (trasformazione proiettiva essendo quella che muta ogni spazio S_k contenuto in S_n in uno S_k). Perciò, dato il sistema a derivate parziali non è possibile far distinzione fra una varietà le coordinate dei cui punti soddisfano ad esso, ed una qualsiasi sua trasformata proiettiva. Le proprietà comuni a tutte queste varietà proiettivamente equivalenti sono dette proprietà proiettive. Ne segue che il nostro

Digitized by Google

sistema integrabile di equazioni è atto a rappresentare tutte e sole le proprietà proiettive della V_r. Tuttavia la rappresentazione analitica data dalle (3) e di conseguenza il sistema di equazioni alle derivate parziali che ne risulta, contiene alcuni elementi che non sono determinati dalla V_r e che si possono cambiare senza alterare la V_r stessa. Infatti si è già notato che le y_i sono determinate a meno di un fattore arbitrario $\lambda(u_1, u_2, \ldots u_r)$. Di più ogni trasformazione del tipo

$$v_k = \varphi_k(u_1, u_2, \ldots, u_r) \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

non fa che cambiare i parametri ai quali si riferiscono i punti della V_r e quindi non cambia affatto la V_r. Siamo quindi condotti a studiare come opera una trasformazione del tipo

$$\text{(T)} \qquad \begin{aligned} \eta &= \lambda(u_1, u_2, \ldots, u_r)\, y \\ v_k &= \varphi_k(u_1, u_2, \ldots, u_r) \qquad (k = 1, 2, \ldots, r) \end{aligned}$$

ove le $\lambda, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$ sono funzioni arbitrarie dei loro argomenti. Tutti i sistemi così ottenuti corrispondono alla stessa famiglia di V_r proiettivamente equivalenti. Quelle combinazioni dei coefficienti e delle variabili che rimangono inalterate per una trasformazione del tipo (T) si dicono *invarianti* e *covarianti*. Essi danno una espressione adeguata delle proprietà proiettive di una V_r, perchè non dipendono dagli elementi estrinseci relativi ad una determinata rappresentazione analitica.

Noi abbiamo esclusa fino ad ora la presenza di equazioni della forma (1) che ci limitassero a considerare i punti di una V_k. Ma la loro esistenza non altera per nulla la nostra teoria. Infatti se è data una V_r appartenente ad una V_k, le coordinate dei punti della V_r sodisfano già di per sè alle equazioni (1) della V_k. Se poi invece di partire da una V_r data si partisse dal sistema di equazioni alle derivate parziali, basterebbe considerare quelle soluzioni che soddisfano alle (1); cioè basta aggiungere le (1) al nostro sistema. O anche, ma ciò può importare difficoltà maggiori, se ne può tener conto imponendo particolari condizioni ai coefficienti del sistema.

Quindi:

La geometria proiettiva di una V_r *analitica immersa in uno* S_n *è equivalente alla teoria degli invarianti e covarianti di un si-*

Digitized by Google

stema completamente integrabile di equazioni alle derivate parziali, lineari ed omogenee, ad r *variabili indipendenti, la cui soluzione generale dipende da* $n+1$ *costanti arbitrarie.*

Se ricordiamo quanto s'è detto in principio sull'arbitrarietà dell'elemento generatore dello spazio, e la conseguente generalità della nozione di V_r di uno S_n, anche se applicata allo spazio ordinario, sarà facile apprezzare il carattere dominante di questa generalizzazione che unifica un campo così vasto. Per chi poi sa come la geometria metrica possa, in un certo senso, ritenersi compresa nella geometria proiettiva, sarà facile veder che cosa, bisogna aggiungere al principio testè esposto per ridurre nel suo dominio anche la geometria metrica.

Chicago, Università, Dicembre 1912.

ELENCO DI ARTICOLI SULL'ARGOMENTO

W. W. Denton, On the osculating quartic of a plane curve.
Trans. Am. Math. Soc. vol. 10 (1909) pp. 297-308.
Projective Differential Geometry of developable surfaces.
Trans. Am. Math. Soc. vol 14 (1913) pp. 175-208.

G. M. Green, Projective Differential Geometry of triple systems of surfaces. (Dissertation)
Press of the New Era Printing Co. Lancaster, Pa, 27 pages. Two other papers by Green are to appear soon in the Trans. Am. Math. Soc.

C. L. Moore, Surfaces in Hyperspace which have a tangent line with three point contacts through each point.
Bull. of the Amer. Math. Soc., vol 18. (1912).

J. Nyberg, Projective Differential Geometry of rational cubic curves.
American Journal of Mathematics, vol 35 (1913) pp. 453-464.

S. W. Reaves, On the projective differential geometry of plane anharmonic curves.
Annals of Matematics 2d. series vol. 15 (1913) pp. 20-26.

A. Ranum, On the projective differential geometry of n-dimensional spreads generated by ∞^1 flats.
Annali di matematica pura ed applicata. Vol. 19 (1912) pp. 205-250.

C. T. Sullivan, Properties of surfaces vhose asymptotic curves belong to linear complexes.
Trans. Am. Math. Soc. vol. 15 (1914) pp. 167-196

Digitized by Google

E. B. Stouffer, Invariants of linear differential equations, with applications to ruled surfaces in five-dimensional space.
Proocedings of the London Matematical Society. Series 2 vol. II. pp. 185-224.

E. J. Wilczynski, Projective Differential Geometry of Curved Surfaces.
First Memoir, Trans. Am. Math Soc. vol. 8 (1907) pp. 233-260.
Second Memoir, " " " " vol. 9 (1908) pp. 79-120.
Third Memoir, " " " " vol. 9 (1908) pp. 293-315.
Fourth Memoir " " " " vol. 10 (1909) pp. 176-200.
Fifth Memoir " " " " vol. 10 (1909) pp. 279-296.
One-parameter families and nets of plane curves.
Trans. Am. Math. Sec. vol 12 (1911) pp. 473-510.
Sur la théorie générale des Congruences. (Couronné par la classe des sciences, dans la séance du 15 décembre 1909).
Mémories publiés par la classe des sciences de l'Académie royale de Belgique. Collection in-4°, Deuxiéme série, tome 3, 1911, pp. 1-86.
On a certain class of self-projective surfaces.
Trans. Am. Math. Soc. vol. 14 (1913) pp. 421-443.
Ricerche geometriche intorno al problema dei tre corpi.
Annali di Matetematica pura ed applicata. Serie III, tomo 21, (1913) pp. 1-31.
Ueber Flächen mit unbestimmten Directrixkurven.
Matematische Annalen, vol. 36 (1914)
On a certain completely integrable system of linear partial differential equations.
American Journal of Math. vol. (1914) pp. 231-260.

* * *

E. Bompiani, Sistemi di equazioni simultanee alle derivate parziali e caratteristica.
Atti Acc. R. di Torino, vol. XLIX (1913). pp. 1-51.
Forma geometrica dalle condizioni per la deformabilità delle ipersuperficie.
Rendic. R. Acc. dei Lincei, 1° sem. (1914) pp. 126-131.
Contributo allo studio dei sistemi lineari di rette nello spazio a quattro dimensioni.
Atti R. Istit. Veneto, t. LXXIII (1914) pp. 579-616.
Alcune proprietà proiettivo-differenziali dei sistemi di rette negli iperspazii.
Rend. Circ. Mat. di Palermo, t. XXXVII (1914) pp. 305-331.

Digitized by Google

Sullo spazio d'immersione di superficie possedenti dati sistemi di curve.

Rendic. R. Istit. Lombardo, vol. XLVII (1914) pp. 177-192.

G. Fubini, Definizione proiettivo-differenziale di una superficie. Atti Acc. R. di Torino vol. XLIX, (1914) pp. 786-802.

A. Terracini, Sulle varietà di spazi con carattere di sviluppabili. Atti Accad. R. di Torino, vol. XLVIII (1913).

Alcune questioni sugli spazi tangenti e osculatori ad una varietà.

Nota I. Atti Acc. R. di Torino vol. XLIX.

Storia.

Y. Mikami — *The developement of Mathematics in China ond Japan, with 67 Figuren the Text* (Abh zur Gesch. der math. W. issensch. 35., XXX Heft. Leipzig, Teubner 1912). 8°. b. X + 347 (Prezzo del vol. leg. Mk. 11).

La storia delle matematiche (anzi la storia generale della cultura) offre un problema oltre ad ogni dire oscuro, difficile ed importante, quello, cioè, di determinare il livello raggiunto dalla scienza nell'estremo Oriente. Esso, sino a poco tempo fa, non esisteva che per la Cina, la civiltà giapponese essendo di quelle che non sono incluse di consueto nel quadro delle storie universali, e le soluzioni a cui ci si atteneva venivano presentate con molte riserve, quasi con timidità, perchè ottenute utilizzando pochi e mal fidi documenti e perchè era ben nota la propensione dei Cinesi ad estollere le proprie benemerenze, si da far credere di essere giunti da soli, in epoca remotissima, a risultati a cui gli Europei arrivarono assai più tardi. Per ciò deve essere, e sarà indubbiamente salutata festosamente un'opera, quale è quella di Yoshio Mikami (1), intesa ad arrecare alla soluzione di quel problema elementi genuini, epperò attendibilissimi. Se l'A., con piena ragione, non s'illude, nè vuol far credere ai lettori, di avere esaurita la questione, gli è che enormi sono le difficoltà che incontra

(1). L'opera fu riveduta, dal punto di vista linguistico, dal Prof. G. Bruce Halsted, che vi premise una brevissima nota introduttoria.

Ci sia lecito notare due errori che alterano il senso.

p. 86 linea 14ª dal basso, invece di 308 leggi 3008.

p. 140, linea ultima, si legga 3 invece di 8.

Digitized by Google

chi voglia raccogliere e poi interpretare i documenti che permettono di seguire l'evoluzione storica dei popoli dell'estremo Oriente: a dimostrarlo basti dire che sulla lettura dei nomi propri dei pensatori indigeni i competenti non si posero ancora d'accordo, mentre quelli degli europei sono talmente deformati che, direttamente, è impossibile ristabilirne l'esatta lettura; si aggiunga che in Giappone bene spesso le scoperte dei maestri sono attribuite ai discepoli (meno discutibile sarebbe certamente il criterio opposto!) e di molti problemi semplicemente enunciati in un'edizione si trova la soluzione nelle successive.

Nel riferire le conclusioni dotate di maggiore novità ed importanza esposte dall'A., ci occuperemo prima della Cina (a cui si riferiscono i primi 21 Capitoli, p. 1-155, dell'opera presente), poi del Giappone (Cap. 22-47, p. 156-330), dopo di avere osservato che, per quanto concerne il celeste impero, l'autore si giovò ampiamente delle vaste raccolte di *Biografie di matematici ed astronomi* pubblicata di Yüan Yüan sul finire del Sec. XVIII, mentre nel redigere la parte relativa all'impero del sole Levante trasse molti elementi dalla *Storia della matematica giapponese* di T. Endo (1876).

***

« La Cina è la più antica nazione del mondo. Per antichità può venire paragonata soltanto all'Egitto ed a Babilonia. Per quanto con le nostre ricerche noi risaliamo verso i periodi più remoti della storia cinese, noi sempre troviamo traccia di cultura primitiva. Secondo gli annali del luogo, i Cinesi godettero della loro civiltà, da decine di migliaia di anni nel passato. Col sorgere di una vita civilizzata, albeggiò anche la matematica. I Cinesi, dai tempi più antichi, furono una razza osservantissima dei riti religiosi e che dedicarono le massime cure all'ordinamento del calendario; quindi non può esservi nessun dubbio che abbiano coltivato col maggiore impegno anche nei tempi più antichi le arti matematiche. Ma ci troviamo nell'assoluta impossibilità di investigare lo svolgersi della scienza nell'antichità remota, per l'assoluta mancanza di documenti relativi.

« Non v'ha dubbio che la Cina sia stata una nazione antica. Ma i Cinesi non abitarono sempre la vasta contrada limitata dal fiume Giallo e dal Yangtese Chiang; essi vennero dall'Occidente ad occupare il paese nel quale attualmente vivono. Talora vengono

Digitized by Google

designati siccome una razza affine ai Babilonesi. Come gli eruditi hanno notato, le antiche civiltà dei due popoli hanno fra loro grande somiglianza. Ammesso ciò, non è forse possibile che i Cinesi antichi abbiano avuta una cognizione delle regole aritmetiche uguale a quella posseduta dai loro fratelli occidentali? Ma oggi noi non siamo in grado di affermare e di negare siffatta opinione. Perciò noi non ci addentreremo, almeno in questo momento, od indagare le scambievoli relazioni tra la matematica svoltasi in Cina e quella coltivata in Babilonia. Quindi, tale interessante questione deve restare intatta ed essere riserbata ad investigazioni future ".

Queste parole con cui il Mikami comincia il suo lavoro possono servire a porgere un'idea della difficoltà da lui incontrate e della circospezione di cui egli non si è mai allontanato. Ad esse tien dietro un'esposizione delle nozioni aritmetiche dei Cinesi, quali sono attestate da opere le cui origini si fanno risalire al regno del così detto " imperatore giallo ", cioè circa all'anno 2700 a. C. Si tratta di raccolte di problemi risoluti col mezzo di regole semplicemente enunciate, alcuni di indole pratica, altri di natura geometrica, ove (nota l'A.) manca qualunque traccia di sommazione di progressioni aritmetiche o geometriche. La prima opera avente i caratteri di un vero trattato risale al 600 a. C., è divisa in tre libri e porta il titolo *Aritmetica classica di Sun-Tsu*; il sistema di numerazione ivi usato è a base 10; oltre a problemi determinati, se ne trovano ivi di indeterminati, (quale è quello, dotato ancora di considerevole valore, di calcolare un numero conoscendone i resti della divisione per certi dati numeri), oltre a questioni di stretta pertinenza delle scienze positive se ne trovano di quelli prodotti dall'insaziabile desiderio di prevedere il futuro che ha sempre tormentato l'umanità. A titolo di curiosità riferiamo il problema di siffatta specie con cui si chiude l'opera citata, nonchè la relativa pretesa soluzione:

" *Problema:* Una donna incinta ha 29 anni; al termine di nove mesi avrà essa un maschio od una femmina?

Soluzione: Prendi 49; aggiungi il numero del mese del concepimento; togli l'età della madre. Da ciò che resta togli il cielo 1, la terra 2, l'uomo 3, le 4 stagioni, i 5 elementi, le 6 leggi, le 7 stelle, gli 8 venti, le 9 provincie; se il resto è dispari il nascituro sarà maschio, se pari femmina ".

Di data più recente e di valore superiore è un altro trattato

Digitized by Google

intitolato *Aritmetica classica dell'isola del mare* dovuta a Liu Hui, vissuto nel III Sec, dell'Era nostra; le soluzioni ivi insegnate di alcuni problemi mostrano nell'autore considerevole famigliarità con i procedimenti dell'algebra, donde il Mikami trae la conseguenza che i Cinesi inventarono questa scienza circa un migliaio d'anni prima di quanto si riteneva finora e parecchie centinaia prima della comparsa di essa in Europa.

L'A. passa poi a descrivere il contenuto di alcune opere d'aritmetica reputate classiche perchè assunte quali testi ufficiali nella preparazione ad esami governativi; esse insegnano tutta la scienza matematica cinese sino al VI Sec. dell'E. v., ma non sono le uniche che furono scritte, giacchè di molte ogni traccia è andata perduta. Si tratta ivi sempre di questioni numeriche accompagnate dalle loro soluzioni e gli è dallo studio accurato di queste che è possibile comporre un quadro delle cognizioni aritmetico-algebriche possedute da chi le congegnò. Sopra quanto espone l'autore siaci lecito fare due osservazioni.

I. Egli assicura che i Cinesi pervennero alla regola per dividere due frazioni $\left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}\right)$ assai prima degli Europei, i quali vi giunsero nel Sec. XVI, e anche prima degli Indiani, che la conobbero nel IX; la loro destrezza nell'applicarla risulta da ciò che il quoziente di $1768\frac{4}{7}$ per $27\frac{3}{5}$ vale effettivamente $64\frac{38}{463}$ come si legge nel testo di Chang (p. 40).

II. Dal seguente problema: « Un gallo costa 5 monete, una gallina 3, mentre tre polli costano complessivamente una moneta; se con 100 monete vengono comperati 100 capi, quanti se ne acquistarono di ogni specie? ». Il risolutore (Chang) dà tre soluzioni in numeri interi e positivi; ora è notevole che *sono tutte e sole le soluzioni possibili;* infatti le equazioni del problema sono:

$$x + y + z = 100, \qquad 5x + 3y + \frac{1}{3}z = 100;$$

ora, togliendo dal quintuplo dalla prima la seconda e poi dividendo per 2 il risultato si trova:

$$y + \frac{7z}{3} = 200,$$

onde, detto u un intero positivo arbitrario, si ha la seguente soluzione generale:

$$x = 4\ (u - 25),\ y = 200 - 7u,\ z = 3u;$$

Digitized by Google

ora, affinchè z e y risultino positivi, u non può assumere che i valori 26, 27, 28, a cui corrispondono le tre soluzioni 4, 18, 78; 8, 11, 81; 12, 4, 84, che sono appunto quelle segnalate dal matematico Cinese.

Un'altra questione nelle quali i Cinesi precorsero gli Europei fu nel calcolo approssimato del rapporto π della circonferenza al diametro; non solo essi usarono successivamente i valori 3, $\sqrt{10}$, 3. 14, $\frac{22}{7}$ ma Tsu Ch'ung-chih (n. 430, n. 501), circa mille anni prima di Adriano Mezio (1585), ottenne il valore $\frac{355}{113}$, onde il Mikami chiede che questo valore venga designato, non più col nome del citato matematico olandese, ma con quello del ricordato cinese; è una domanda giustificatissima, ma che è prevedibile non verrà adottata, chè nulla riesce più difficile del mutare una nomenclatura in uso; va anche notato che quel valore di π fu abbandonato dai matematici Cinesi posteriori, sicchè ben presto cadde in completa dimenticanza.

Un altro campo nel quale i Cinesi precedettero gli Europei fu la risoluzione delle operazioni cubiche numeriche, delle quali, nella prima metà del VII Sec., essi insegnarono a trovare le radici per approssimazione.

Se, come dicemmo, mal determinate ed oscure sono le relazioni degli abitanti della Cina con gli antichi Babilonesi, non bene delineate sono quelle che passarono in epoche più prossime tra essi e gli Indiani. Tuttavia, secondo il Mikami, non può negarsi che le opere scritte sulle rive del Garge siano state studiate nel Celeste Impero, onde è estremamente probabile che, in particolare, il simbolo 0, che s'incontra ivi a partire dal Sec. XIII, provenga dalla traduzione di opere indiane.

Ad investigazione future è riserbato di determinare con minore imprecisione i rapporti intellettuali passati fra l'India e la Cina, in particolare l'influenza matematica che questa ha subìto da quella. In conseguenza di tale incertezza è impossibile pronunciare un sicuro giudizio sopra alcune opere analizzate dall'autore nei Capitoli della sua opera che seguono il IX, opere in cui sono ulteriormente svolti alcuni argomenti già trattati in lavori cinesi più antichi, ma sono affrontate anche questioni del tutto nuove. Ad es. l'area di un triangolo del quale si conoscono le lunghezze dei lati viene calcolata direttamente con un metodo equivalente al-

Digitized by Google

l'applicazione della celebre formola di Erone Inoltre le equazioni algebriche numeriche, sino dal secolo XIII, venivano risolute con un procedimento che in sostanza rientra in quella di Horner ed il Mikami sembra credere e volere far credere che tale coincidenza *non* sia stata fortuita, opinione questa che sarà per fermo condivisa da pochi, riflettendo che quel metodo è così naturale che in Europa, poco primi dell'Horner, venne immaginato per proprio conto da P. Ruffini (1); d'altronde, non ha osservato Goethe per bocca di Mefistofele « chi può pensare mai una cosa che non sia stata pensata e ripensata prima di lui? ». Va finalmente rilevato un altro punto di contatto fra i Cinesi e gli Europei: essi scrivevano sempre l'equazione da risolvere con i termini contenenti l'incognita tutti in un membro ed il termine noto sempre *negativo*; Harriot similmente poneva in un membro il solo termine noto supposto sempre *positivo*. — Sopra altre ricerche compiute dai Cinesi (in particolare su quelle relative alla risoluzione di sistemi determinati di equazioni non tutte lineari) per brevità siamo forzati di stendere il velo del silenzio, rimandando il lettore all'opera che stiamo analizzando.

Un terzo popolo, dopo i Babilonesi e gl'Indiani, che indubbiamente esercitò qualche influenza sopra lo sviluppo della matematica cinese, è l'Arabo; ne fa fede il fatto che nel 1267 venne adottato in Cina un calendario composto e presentato dall'arabo Cha-ma-li-ting per sostituire quelli in uso riconosciuti per inesatti; anzi a partire da quest'epoca, per avere sempre calendari esatti, vennero assoldati alcuni astronomi arabi, i quali certamente avranno diffuso nel celeste impero, non solo quanto sapevano intorno al corso delle stelle, ma anche le scienze ausiliari quali l'aritmetica e trigonometria. « Ma », osserva l'autore a p. 108, « siamo nell'assoluta impossibilità di concretare l'influenza esercitata dall'estero sopra la matematica dei Cinesi » e soggiunge poco dopo che « per quanto sappiamo i Cinesi nulla hanno effettivamente assorbito da fonti arabe ». Dopo un breve cenno intorno allo stato delle matematiche sotto la dinastia Ming, breve perchè si tratta di un'epoca di profonda decadenza, il Mikami passa a descrivere l'introduzione in Cina della matematica europea, cominciando con le seguenti parole:

(1). F. Cajori. *P. Ruffini ed il così detto « metodo di Horner »* (questo Bollettino T. XIII, 1911, p. 81-86).

Digitized by Google

« L'astronomia e la matematica dei Cinesi, che avevano prosperato nel XIII Sec. nelle mani di eminenti scienziati, ebbe la mala sorte di cadere nell'oblio durante l'epoca seguente, nella quale regnò la dinastia Ming. I dotti di questo tempo erano talmente degeneri da mostrarsi incapaci di comprendere i celesti elementi dell'algebra e la riforma del calendario venne abbandonata, benchè col tempo quello in uso fosse divenuto impreciso. In tale congiuntura fu una vera fortuna per il progresso della scienza cinese l'ingresso nell'impero di missionari appartenenti alla compagnia di Gesù. Essi erano abbastanza dotti da insegnare astronomia, matematiche ed altri rami di scienza, con lo scopo di diffondere la loro religione. Così ottennero il maggiore successo e conseguirono popolarità e seguito fra gli studiosi indigeni, i quali si dimostrarono favorevoli all'introduzione in Cina della civiltà occidentale ».

Come è noto fu Marco Polo il primo europeo che approdasse in Cina (1274); ma è soltanto nel 1579 che entrò a Canton il gesuita M. Ruggiero, ben tosto seguito da Matteo Ricci (1552-1610) ora gli è appunto costui che promosse e diresse la più antica traduzione in Cina e dei sei primi libri degli *Elementi di Euclide* (1603-1607); a lui si deve poi un trattato di aritmetica europea, ed inoltre un proseguimento degli *Elementi*. Il suo esempio fu seguito dal tedesco Adam Schaal, che fu chiamato in Cina nel 1629 in qualità di astronomo ed ivi rimase sino alla sua morte (1678) e così continuò il flusso verso Oriente di scienza europea; come prova di esso diremo che le prime tavole logaritmiche apparse in Cina sono la versione di quelle notissime del Vlacq (1628).

A questo periodo in cui la Cina fu scolara dell'Europa, ne segue un altro (iniziatosi circa col principio del Sec. XVIII) in cui essa ritorna ai procedimenti caratteristici dell'algebra indigena. I risultati conseguiti da principio per tal via non furono, a dir vero, cospicui. Infatti il metodo suggerito nel 1751 da Wang Yuen-Ching per costruire un triangolo rettangolo in numeri ($a = 2\sqrt{mn}$, $b = m - n$, $c = m + n$) non supera quelli nell'antichità inventati da Pitagora, da Platone e da Euclide. D'altronde, in altra opera coeva, è detto che il sistema

$$9x + 7y + 5z + 3u = 960$$
$$x + y + z + u = 160$$

ammette 4681 soluzioni, mentre un matematico di poco posteriore

Digitized by Google

disse che il loro numero è invece 3121 (p. 125). Ora entrambi questi numeri sono errati; infatti dalle due equazioni date, eliminando u, si trae quest'altra

$$6x + 4y + 2z = 480$$

ossia $$3x + 2y + z = 240$$

o anche $$2y + z = 3\,(80 - x);$$

ora questa è soddisfatta, qualunque sia Θ, da

$$y = 80 - x - \Theta\,,\ z = 80 - x + 2\Theta$$

epperò $$u = x + 3\Theta;$$

ad affinchè tutti questi valori risultino positivi è poi necessario che sia $x + \Theta < 80$, onde Θ può assumere successivamente i valori $1, 2, \ldots 77, 78$; in corrispondenza x assume i valori

$$\begin{array}{l} 1, 2, \ldots, 77, 78 \\ 1, 2, \ldots, 77, \\ \ldots\ldots\ldots \\ 1, 2 \\ 1, \ ; \end{array}$$

così si trovano $78 + 77 + \ldots + 2 + 1 = 79 \times 39 = 2081$ soluzioni.

In presieguo di tempo i risultati furono più cospicui e vennero mietuti in quegli stessi campi in cui già i Cinesi avevano dimostrata la loro abilità, cioè risoluzione delle equazioni numeriche e quadratura del circolo. Nel primo di questi argomenti essi raffinarono siffattamente i metodi di approssimazione da ottenere certe radici con non meno di 11 decimali, mentre nel secondo spinsero tanto innanzi l'iscrizione e circoscrizione dei poligoni regolari da ottenere π con 19 decimali esatte; anzi non a tale prossimazione si arrestarono chè, ricorrendo ad opportune serie, non solo ottennero un valore di π con 100 decimali, ma ne trovarono una per $\frac{1}{\pi}$ con 91. Non contenti di ciò nel Secolo scorso i Cinesi trattarono il problema della quadratura del cerchio anche dal punto di vista analitico, stabilendo alcune serie elegantissime per esprimere π e π^2 ed anche per calcolare il perimetro d'un'elisse o la lunghezza di un arco di cerchio qualsivoglia.

Con l'esposizione di tali formole si chiude la I Parte dell'opera in discorso; è appena necessario rilevare quanto essa insegni, onde i lettori debbono essere grati all'A. di quanto egli ha loro appreso; gl'incontentabili, però, manifesteranno il desiderio che in altra occasione egli ci presenti un quadro completo del-

Digitized by Google

l'odierna matematica cinese, dal quale risulti quali sono le correnti di pensiero che ivi si manifestano, quali sono le materie più generalmente coltivate e quali quelle totalmente ignorate e finalmente quali sono le influenze straniere che si fanno sentire in modo più chiaro od efficace. Gli è soltanto quando tali punti saranno chiariti che si potrà sapere se nel Celeste Impero i matematici europei possono trovare dei collaboratori od eventualmente dei maestri, oppure se le trajettorie percorse dagli uni e dagli altri sono destinate, almeno per qualche tempo, a non avere alcun punto comune. G. L.

(Continua).

Funzioni di linee.

Vito Volterra I. *Leçons sur les équations intégrales et intégro-différentielles publieés par* M. Tomassetti *et* F. S. Zarlatti, Paris, Gauthier-Villars 1913: 8°, p. 164. (Prezzo fr. 5,50).
II. *Leçons sur les fonctions de lignes receuillies et rédigées par* J. Pérès. Paris, Gauthier-Villars, 1913: 8°, p. 230 + VI. (Prezzo L. 7,50).

Questi due volumetti, pubblicati l'anno scorso a distanza di pochi mesi nella fortunata raccolta del Borel, trattano di argomenti strettamente affini, tanto che si possono ritenere l'uno complemento dell'altro. Ma il loro intimo carattere è assai differente; nel primo, benchè l'autore serbi l'originalità naturale per chi in questi studi fu iniziatore felice, prevale il carattere di trattazione sistematica che raccoglie i risultati fin qui ottenuti sulle equazioni integrali. Il secondo invece ha la freschezza, la spontaneità di un libro, in cui l'autore ha raccolto una serie di pensieri costantemente seguiti, pure attraverso alle altre molteplici manifestazioni della sua attività scientifica, durante quasi un trentennio, da quando prima egli si presentava al pubblico matematico. L'autore riattacca i propri studi direttamente alle tendenze più generali della matematica con larghi cenni storici nei capitoli iniziale e finale quasi a prefazione e conclusione del volume: ma pel resto procede rapidamente a esporre le proprie idee senza sentire il bisogno di richiamare le ricerche collaterali alle sue, nè di raggiungere la completezza e la simmetria di una trattazione sistematica.

In questa recensione io seguirò la traccia di questo secondo

Digitized by Google

volume: non mi mancherà per tal modo l'occasione di indicare quali sono gli argomenti che, sommariamente richiamati in questo, sono esposti diffusamente nel primo volume (1).

*
* *

Il concetto di funzione di linea è in casi particolari da molto tempo famigliare nella matematica: poichè ogni espressione che contenga uno o più simboli che rappresentino funzioni di una variabile, e dipenda da tutti i valori che queste assumono in certi campi determinati o variabili, deve considerarsi quale funzione delle linee che queste funzioni rappresentano. Così $\int_a^b f(x)\,dx$, ossia l'area che sta fra le ordinate di ascissa a e b, l'asse delle x, la linea $y = f(x)$, è un numero funzione della linea; similmente sono funzioni di linea gli integrali, di cui il calcolo delle variazioni cerca i massimi e i minimi; ed ancora le soluzioni di una equazione differenziale in un punto possono considerarsi quali funzioni delle linee che rappresentano i coefficienti dell'equazione, ecc.

Sia F una funzione delle n linee $y = f_i(x)$ con $a_i \leq x \leq b_i$, $i = 1,2...n$; la si indicherà colla scrittura $F\left|\left[\overset{b_1}{\underset{a_1}{f_1}}(x), \overset{b_2}{\underset{a_2}{f_2}}(x), \ldots, \overset{b_n}{\underset{a_n}{f_n}}(x)\right]\right|$. Può accadere che F dipenda anche da altre variabili $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_h$ rappresentanti numeri o punti: una tale funzione si scriverà:

$$F\left|\left[\overset{b_1}{\underset{a_1}{f_1}}(x), \overset{b_2}{\underset{a_2}{f_2}}(x), \ldots, \overset{b_n}{\underset{a_n}{f_n}}(x), \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_h\right]\right|$$

Per lo studio e gli usi pratici delle ordinarie funzioni, potenti strumenti di indagine si hanno nelle classificazioni e nei processi fondamentali dell'analisi: processi di derivazione, di integrazione, di risoluzione di equazioni e nelle classificazioni secondo la continuità ecc. Come estendere queste teorie alle funzioni di linee?

Perciò serve come guida il principio generale del passaggio dal finito all'infinito, dal discontinuo al continuo (II, 1). Allo stesso modo che l'integrale compare come limite di una sommatoria i cui termini dipendono solo dai valori che la funzione integrando

(1) Nelle citazioni I e II indicheranno il primo e il secondo volume, il numero arabico che loro segue indica il capitolo.

Digitized by Google

assume in un numero finito di punti, così si può in generale (sotto convenienti ipotesi) considerare una funzione di linea come il limite preso per $n = \infty$ di una funzione intermedia di n variabili i valori delle quali siano quelli dell'ordinata di detta linea in un numero finito di punti.

Consideriamo ad es. la definizione di derivata di una funzione $F\,|\,[\overset{b}{\underset{a}{f}}(x)]\,|$ della linea $C \equiv (y = f(x))$. Sia P il punto di C di ascissa ξ: si consideri la $F\,|\,[\overset{b}{\underset{a}{f}}(x)]\,|$ come limite di funzioni intermedie $g(y_1 y_2, \ldots, y_n)$ di più variabili $y_1, y_2, \ldots, y_n$ di cui una sia l'ordinata $\eta = f(\xi)$ di P. Immaginiamo allora di variare la funzione $f(x)$ soltanto nell'intorno di P; sia precisamente $C \equiv (y = f(x) + \varphi(x))$ la curva variata, e supponiamo che essa racchiuda con C un'area σ tutta da una banda di C ed interna al rettangolo di centro P e lati paralleli agli assi coordinati di lunghezza h ed ε (1). Il limite per $h = 0$, $\varepsilon = 0$ del rapporto $\frac{\Delta F}{\sigma}$ dell'incremento della funzione F all'area σ si può considerare come l'analogo per F della derivata parziale delle funzioni intermedie g rispetto alla variabile η: esso definisce la *derivata* di $F\,|\,[\overset{b}{\underset{a}{f}}(x)]\,|$ nel punto ξ: ed è una funzione della linea $y = f(x)$ e del punto ξ: la si indicherà con

$$F'\,|\,[\overset{b}{\underset{a}{f}}(x), \xi]\,|.$$

Analogamente si definiscono le derivate seconde, terze,...; e come le analoghe derivate parziali dipendono da 2, 3,..., indici di derivazione, similmente le derivate di ordine superiore delle funzioni di linea dipenderanno da 2, 3... punti ξ; e si indicheranno con

$$F'\,|\,[\overset{b}{\underset{a}{f}}(x), \xi, \xi_1]\,|,\ F''\,|\,[\overset{b}{\underset{a}{f}}(x), \xi, \xi_1, \xi_2]\,|\ldots$$

Con tale definizione molti teoremi sulle derivate si estendono facilmente. Consideriamo, ad es.: una linea variata $y = f(x) + \varphi(x)$ qualunque, e l'incremento $\Delta F = F\,|\,[f(x) + \overset{b}{\underset{a}{\varphi}}(x)]\,| - F\,|\,[\overset{b}{\underset{a}{f}}(x)]\,|$. Sappiamo che per una funzione intermedia l'incremento diffe-

(1) Analiticamente queste condizioni si esprimono col dire $|\varphi(x)| < \varepsilon$, $\varphi(x) = 0$ per $|x - \xi| \geq h$, $\varphi(x)$ sempre ≥ 0 oppure ≤ 0

Digitized by Google

risce dal differenziale totale — e cioè dalla somma dei prodotti delle derivate parziali per gli incrementi delle variabili — per infinitesimi di ordine superiore ove si assuma quale infinitesimo principale la somma dei valori assoluti di tali incrementi. Del pari qui si consideri, sostituendo le somme con integrali, la quantità $\delta F = \int_a^b F' \,|\, [f(x), \xi] \,|\, \varphi(\xi)\, d\xi$, che chiamasi *variazione* di F; essa differisce da ΔF per infinitesimi di ordine superiore, ove quale infinitesimo principale si assuma $\int_a^b |\, \varphi(\xi) \,|\, d\xi$. (I 1)

Sappiamo ancora che per le funzioni di più variabili come le solite funzioni intermedie valgono la formula e la serie di Taylor: così qui - sotto certe ipotesi - si avrà lo sviluppo:

$$(1) \qquad F \,|\, [f(x) + \varphi(x)] \,| = F \,|\, [f(x)] \,| +$$

$$\sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n!} \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b F^{(n)} \,|\, [f(x), \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n] \,|\, \varphi(\xi_1)\, \varphi(\xi_2) \ldots \varphi(\xi_n)\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_n :$$

la quale per $f(x) = 0$ ci darà lo sviluppo:

$$(2) \qquad F \,|\, [\varphi(x)] \,| = \Phi_0 +$$

$$\sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n!} \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b \Phi_n (\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n)\, \varphi(\xi_1)\, \varphi(\xi_2) \ldots \varphi(\xi_n)\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_n$$

di una funzione di linea per integrali n-upli. È chiaro che, ove F dipenda anche da altre linee o punti, i coefficienti Φ_0 e Φ_n saranno a loro volta funzioni di tali linee o punti (I, 1).

Nè sono questi i soli teoremi di calcolo che si estendono alle funzioni di linea: rammenteremo il teorema sulla invertibilità delle derivazioni, il teorema di Stokes (II, 2), i risultati di Hamilton-Jacobi sulle equazioni della meccanica (II, 3).

Naturalmente i concetti e le formule cui abbiamo accennato si potranno applicare solo in certe ipotesi: così già nel caso delle funzioni di linea che presenta il calcolo delle variazioni — tra cui le più semplici sono quelle del tipo $\int_a^b \Phi(f(x), f'(x), x)\, dx$ — non

Digitized by Google

si potrà definire la derivata come si disse più sopra: giacchè affinchè esista $\lim_{\substack{h=0 \\ \varepsilon=0}} \frac{\Delta F}{\sigma}$ occorre in generale porre ulteriori condizioni per $\varphi(x)$: ad es. supporre $|\varphi'(x)| < \varepsilon$, ossia con terminologia di Hadamard, supporre la curva variata in un intorno di ordine 1 della curva data. E neppure con tali limitazioni esisterà in x_1 la derivata rapporto a $f(x)$ della semplicissima funzione di linea

$$A\, f(x_1) + \int_a^b k(x_1, x)\, f(x)\, dx, \tag{3}$$

o più generalmente

$$A\, f(x_1) + F_1 | [f(x_1)] | \tag{4}$$

ove F_1 abbia derivata: per tali funzioni di linea x_1 è un *punto eccezionale*. Ed è opportuno notare che in generale la derivata $F' | [f(x), \xi] |$ di una funzione $F | [f(x)] |$ nel punto ξ ha il punto ξ come punto eccezionale. Questi esempii mostrano come i casi che sfuggono alle precedenti teorie sono tutt'altro che privi di importanza, il che risulterà pure dal seguito: ma anche su questi casi le generalità svolte più sopra gettano assai luce come il Volterra stesso chiarisce con esempi varii.

I capitoli fin qui citati dei volumi del Volterra contengono anche numerosi ed eleganti sviluppi di casi particolari su cui non ci tratterremo: noteremo solo in II, 2 una interessante digressione sulle derivate e gli integrali delle sostituzioni lineari, e sui loro legami colle soluzioni delle equazioni differenziali ordinarie, che forma un altro esempio notevole dell'applicazione del principio del passaggo dal finito all'infinito.

Naturalmente quanto si è detto può estendersi alle funzioni di superficie, ecc.

*
* *

Consideriamo una funzione $F | [f(y), x] |$ di linea e punto: uguagliandola a zero avremo una equazione funzionale nella $f(y)$

$$F | [f(y), x] | = 0. \tag{5}$$

Digitized by Google

Considerando una qualunque funzione intermedia a n variabili di cui F sia il limite, otterremo che la (5) può considerarsi come il limite per $n = \infty$ dell'equazione

$$g(z_1, z_2, \ldots z_n, x) = 0; \tag{6}$$

Dovendo la (6) essere verificata per ogni valore di x, dando n differenti valori a x, potremo trarre un sistema di n equazioni nelle n incognite z_i: lo studio della (5) si modellerà dunque sulla teoria dei sistemi di n equazioni in n incognite. E come per questi è fondamentale lo studio dei sistemi di n equazioni lineari costituite dall'uguagliare a zero i termini di ordine 0 e 1 dello sviluppo di Taylor dei loro primi membri — studio che porta al ben noto criterio del Jacobiano — così per (5) occorrerà anzitutto studiare i termini analoghi del suo sviluppo. Se la (5) si svilupperà secondo il tipo (2), avremo da studiare equazioni del tipo:

$$\varphi(x) = \int_a^b \Phi(x, y) f(y)\, dy \tag{7}$$

Però molte volte, come ad es. se $F[f(y), x]$ è la derivata in x di una funzione di linea $F_1[f(y)]$, il gruppo dei termini di ordine 1 sarà invece del tipo (3), e quindi saremo condotti a studiare equazioni del tipo

$$\varphi(x) = A f(x) + \int_a^b \Phi_1(x, y) f(y)\, dy \tag{8}$$

Così nelle nostre teorie le *equazioni integrali lineari* compaiono come le più semplici fra le equazioni (5): e poichè esse appaiono come limiti di un sistema di ordinarie equazioni lineari, è indicata la traccia da seguirsi per studiarle. A tale studio, appena accennato in II, 4 sono dedicati i cap. 1 e 2 di I, e cioè la maggior parte di questo volume.

Le equazioni del tipo (7) sono dette di *prima specie*, quelle di tipo (8) sono dette di *seconda e di terza specie* secondo che A è costante od è funzione di x. In generale le (7) ed (8) sono dette *equazioni di Fredholm*; quando per x e $y \leq b$ è $\Phi(x,y) = 0$, ossia quando assumono la forma

$$\varphi(x) = \int_a^x \Phi(x, y) f(y)\, dy \tag{9}$$

Digitized by Google

$$\varphi(x) = A f(x) + \int_a^x \Phi_1(x,y) f(y)\, dy \tag{10}$$

diconsi *equazioni di Volterra*: sono queste ultime le equazioni che, come estensione degli studii di Abel e Sonine sull' inversione degli integrali, furono dapprima studiate dal nostro autore, e su cui si hanno risultati più ampii e precisi.

Il capitolo I, 2 è tutto dedicato alle equazioni di Volterra di prima e seconda specie: esse vi sono esaminate anzitutto dal punto di vista del passaggio dal finito all'infinito. La soluzione di (10) per tal via appare nella forma (principio di inversione)

$$f(x) = \frac{1}{A}\left[\varphi(x) + \int_a^x S(x,y)\,\varphi(y)\, dy\right] \tag{11}$$

dove $S(x,y)$ è una funzione detta risolvente, soluzione dell' equazione (principio di reciprocità)

$$\Phi_1(x,y) + A S(x,y) + \int_y^x \Phi_1(x,\xi)\, S(\xi,y)\, d\xi = 0 \tag{12}$$

ed è data dalla serie sempre convergente (principio di convergenza)

$$S(x,y) = -\frac{1}{A}\Phi_1(x,y) - \frac{1}{A^2}\Phi_2(x,y) \ldots - \frac{1}{A^n}\Phi_n(x,y) \ldots$$

$$\Phi_i(x,y) = -\int_y^x \Phi_{i-1}(x,\xi)\,\Phi_1(\xi,y)\, d\xi. \tag{13}$$

L'equazione (9) potrebbe trattarsi collo stesso procedimento: ma è più comodo ridurla alla (10) derivandola rapporto ad x: si ottiene che, posto $\varphi(x) = \frac{\varphi'(x)}{\Phi(x,x)}$ e $\bar{\Phi}(x,y) = \frac{\Phi'_x(x,y)}{\Phi(x,x)}$, la $f(x)$ deve soddisfare alla

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x \bar{\Phi}(x,y)\, f(y)\, dy, \tag{9'}$$

Si esaminano poi diversi casi particolari o singolari: ad es. il caso in cui Φ_1 in (10) sia funzione di $x-y$, il caso in cui Φ_1 divenga infinito in qualche punto, il caso in cui il passaggio da (9) a (9') sia difettoso perchè $\Phi(x,x)$ si annulli identicamente. Gli stessi metodi servono per i sistemi di più equazioni del tipo (9) o (10): e per il caso in cui in luogo di integrali semplici compaiono inte-

Digitized by Google

grali multipli. La soluzione di (9) e (10) è anche studiata coi metodi delle approssimazioni successive, e collo stesso metodo ne sono studiate diverse generalizzazioni che trovano applicazioni in svariati problemi di analisi.

Le equazioni di Fredholm sono studiate in I, 3: ma vi sono esposti solo i risultati relativi a quella di seconda specie (8): è noto che la risoluzione delle equazioni di prima specie (7) è di natura profondamente diversa e richiede condizioni e procedimenti analitici al tutto suoi proprii. Anche per l'equazione (8), la formula risolutiva di Fredholm è posta in limpida relazione col corrispondente problema algebrico. Non manca un chiaro cenno dell'applicazione alla risoluzione del problema di Dirichlet.

Tornando alla teoria generale della (5), il Volterra fondandosi sui risultati acquisiti per le equazioni (8) in II 4, studia la (5) nel caso in cui la variazione della $F\,|\,[\overset{b}{\underset{a}{f}}(y), x]\,|$ per la variazione δf di f abbia la forma $A\,\delta f + \int_a^b \Phi(x\xi)\ \delta f(\xi)\, d\xi$, applicando il il metodo delle successive approssimazioni.

(Continua). E. E. Levi

Funzioni analitiche.

P. Dienes, *Leçons sur les singularités des fonctions analytiques.* Paris, Gauthier-Villars, 1913: 8° p. VIII + 172. (Prezzo fr. 5,50).

Questo volume contiene principalmente ricerche personali dell'Autore e di M^me^ Valérie Dienes, in parte da essi già esposte in memorie recenti, e fondate, da un lato, sui classici risultati dovuti ad Hadamard, dall'altro, sul metodo di sommazione esponenziale di Borel e sulle formole di Mittag-Leffler per la rappresentazione delle funzioni analitiche.

Partendo dal concetto di derivazione generalizzata di Riemann, l'Autore definisce l'*ordine* (*ordre*) di una funzione analitica in un vertice della sua stella di esistenza, e mette in luce le differenze tra l'ordine e il *grado d'infinito (degré d'infinitude)*. Dimostra poi che una serie di potenze, i cui coefficienti tendono a zero al crescere dell'indice, converge in ogni punto regolare, o singolare d'ordine negativo, del suo cerchio di convergenza. Meno semplici sono i risultati se la serie diverge in un suo punto singolare x_0; allora entrano in campo le somme $s_i(x_0)$ dei suoi

Digitized by Google

primi i termini in quel punto e le *medie aritmetiche* ordinarie e d'ordine superiore di tali somme, e l'andamento asintotico di queste espressioni è in stretto rapporto colla natura del punto singolare. Lo stésso avviene quando i coefficienti non tendono a zero ma crescono meno rapidamente di una potenza d'esponente finito dell'indice; cosi, se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ è la serie considerata e se $\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^r} = 0$, le medie aritmetiche d'ordine r tendono, in ciascun punto x_0 d'ordine negativo del cerchio di convergenza, supposto di raggio 1, ad un limite, che è il valore a cui tende la funzione quando x si avvicina ad x_0 dall'interno del cerchio. Particolarmente importante è un lemma, in virtù del quale una funzione $f(x)$ tale, che $\limsup_{x=x_0} |f(x)|$ è finito, può scomporsi nella somma di due funzioni olomorfe entro il suo cerchio di convergenza, di cui una è olomorfa sopra un arco contenente x_0 e l'altra ha i ciefficienti tendenti a zero; mediante questo lemma la singolarità della funzione $f(x)$ può considerarsi come appartenente ad una funzione $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ per cui $\lim_{n=\infty} b_n = 0$, il che ne facilita lo studio. I punti algebrico-logaritmici danno luogo a risultati abbastanza precisi.

Se i coefficienti non soddisfanno alla condizione $\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^r} = 0$, conviene ricorrere ad un metodo più potente di quello delle medie aritmetiche, al metodo di *sommazione esponenziale*, il quale permette di studiare l'andamento della funzione nei vertici del *poligono di sommabilità*; anche in questo caso si ottengono relazioni notevolmente semplici per i punti algebrico-logaritmici. Per istudiare poi i punti singolari esterni al poligono di sommabilità, occorre servirsi di una rappresentazione della funzione avente un campo di validità più esteso. Una rappresentazione di questa natura si ottiene mediante la generalizzazione della sommazione esponenziale introdotta da Mittag-Leffler: l'Autore, facendo uso di una speciale *funzione sommatrice*, giunge a risultati del tutto analoghi a quelli precedentemente stabiliti.

Però i punti singolari accessibili ai metodi sinora svolti risultano in modo pienamente determinato dai metodi stessi. Se si vuole invece conoscere l'andamento della funzione lungo una linea data *a priori* e la natura del punto singolare a cui essa eventualmente faccia capo, sono necessari nuovi strumenti. L'Au-

Digitized by Google

tore fa uso di certi sviluppi in serie di polinomi dipendenti da un parametro e da una curva arbitraria; la variabilità di questi elementi permette di deformare a piacere il campo di validità dello sviluppo, in modo da potere studiare la funzione lungo la linea data.

Tale è, in breve, il contenuto dell'interessantissimo volumetto, che aggiunge un capitolo importante alla teoria moderna delle funzioni. G. VIVANTI.

Teoria dei numeri.

K. HENSEL, *Zahlentheorie*. Berlin und Leipzig, Göschen, 1913: 8° p. XII + 356. (Prezzo Mk 10).

Dei nuovi concetti introdotti da Hensel nell'Aritmetica abbiamo già parlato lungamente (*Bollettino* XI, 1908-09, p. 111-117). Nell'opera che ci sta dinanzi l'Autore applica questi concetti alla esposizione degli elementi della teoria dei numeri. Stabilite e discusse le proprietà caratteristiche delle operazioni aritmetiche, e dimostrati i teoremi fondamentali sui numeri primi e sulle congruenze, egli osserva che lo studio delle congruenze rispetto ad un modulo g non può dare se non risultati di prima approssimazione, i quali debbono essere completati mediante la considerazione delle congruenze rispetto a g^2, g^3, ... Da ciò egli è portato ad introdurre lo *sviluppo g-esimale (g-adische Entwickelung)* dei numeri. Nel campo dei numeri g-esimali sono sempre eseguibili l'addizione, la sottrazione e la moltiplicazione, ma non la divisione; solo nel caso in cui g è un numero primo sono possibili incondizionatamente tutte le quattro operazioni aritmetiche, cioè il sistema costituisce un *corpo*. Però lo studio dell'insieme dei numeri g-esimali può ridursi a quello dei corpi p-esimali, q-esimali, ..., se p, q, ... sono i fattori primi differenti di g; risultato questo della più alta importanza, perchè risolve in modo semplice la questione fondamentale di estendere a campi più generali di numeri le proprietà dei numeri razionali.

Al campo dei numeri p-esimali, dove p è primo, possono trasportarsi i concetti di funzione, continuità, derivabilità, serie convergente etc., e quindi anche quelli di serie di potenze, di serie esponenziale e di logaritmo; ogni numero ha un logaritmo determinato, e i logaritmi obbediscono alle leggi note dell'ordinaria Aritmetica. Parimenti può svolgersi nei campi considerati lo studio delle equazioni algebriche, al quale corre parallelo quello

Digitized by Google

delle congruenze di grado superiore, ed in particolare quello delle conguenze pure. Come caso speciale ne risulta la teoria delle congruenze di secondo grado e dei resti quadratici. Gli ultimi capitoli del libro trattano delle forme binarie e ternarie, della rappresentazione dei numeri mediante forme, e della divisione delle forme in generi.

L'opera è scritta con grande chiarezza e semplicità, e frequenti esempi numerici permettono al lettore di acquistare familiarità nel maneggio dei numeri g-esimali.

G. VIVANTI

Geometria infinitesimale.

G. DEMARTRES, *Cours de géométrie infinitésimale. Avec una Préface de* P. APPELL. Paris, Gautiers-Villars 1913, 8° gr. p. X + 455. (Presso del vol. leg. fr. 17).

Di tutti i rami della geometria nessuno, se non c'inganniamo, fu oggetto di tante eccellenti esposizioni quanto la geometria infinitesimale! Malgrado ciò nuovi trattati della stessa materia continuano ad essere pubblicati, il che, mentre da un lato prova esserne l'importanza sempre più riconosciuta, dall'altro ne agevolerà ognor più la conoscenza, della qual cosa ci si deve anticipatamente rallegrare.

Il nuovo trattato che annunciamo è opera di un distinto matematico che a quella disciplina ha recato alcuni non spregevoli contributi personali. Esso consta di quattro Parti, la I delle quali è un compendio di geometria infinitesimale sintetica delle curve piane e gobbe, generali e speciali, e delle superficie e può venire saltato senza pregiudizio dell'intelligenza delle altre tre parti. Le quali trattano ordinatamente la Teoria analitica delle curve piane e gobbe, la Teoria delle curve tracciate sopra una superficie e le Coordinate curvilinee pure sopra una superficie. Da questi cenni emerge che l'A. conduce i suoi lettori sino allo studio dei sistemi di superfice e delle coordinate curvilinee nello spazio, senza trascurare alcuna delle questioni che si riferiscono ai temi trattati. Da ultimo presenta una serie di esercizi interessanti, in alcuni dei quali sono racchiusi complementi importanti delle teorie esposte.

La chiarezza e la precisione del dettato, il rigore delle argomentazioni e l'eleganza dei calcoli assicurano un buon posto nella letteratura matematica a questo nuovo tratto di geometria differenziale.

G. L.

Digitized by Google

Notizie

FORSCHUNG UND UNTERRICHT. È questo il titolo di un elegante volumetto pubblicato dalla Casa editrice Teubner di Lipsia in occasione della Esposizione internazionale del libro che si tenne recentemente in quella città. Oltre a notizie atte a porgere un concetto dell'enorme sviluppo acquistato in un secolo di vita da quella celebre Casa, sono dati alcuni saggi delle sue più ghiotte pubblicazioni, i quali certamente serviranno quali aperitivi per la generalità dei lettori.

***

LOS INVENTOS DE TORRES QUEVEDO: è questo il titolo di un opuscolo scritto da I. A. Sanchez Pèrez e pubblicato dalla Società matematica spagnuola (Madrid 1914; prezzo 50 cent.). Lo segnaliamo ai nostri lettori perchè parecchie delle macchine ivi descritte servono ad eseguire automaticamente operazioni aritmetiche e algebriche.

***

NUOVI MANUALI HOEPLI.

P. FANTASIA. *Formole ed esercizi per l'applicazione del metodo dei minimi quadrati alla topografia*, 107 Esercizi con 44 incisioni intercalate nel testo. 1914. p. XVI 339. L. 4.

Indice: CAP. I.: Compensazioni di osservazioni immediate. CAP. II. Compensazione di osservazioni immediate. CAP. III. Compensazione di osservazioni condizionate.

C. RANELLETTI, *Elementi di geometria descrittiva ad uso dei RR. Istituti Tecnici*; con 141 incisioni originali. 1914. p. XII 197. Prezzo L. 2.

Indice: CAPP. I, II, III: Rappresentazione del punto, della retta e del piano. CAP. IV: Problemi relativi al piano. CAP. V: Rotazione della figura obbiettiva attorno ad un asse. CAP. VI. Ribaltamenti. CAP VII, Introduzione di nuovi piani di projezione. CAP. VIII. Del triedro. CAP. IX. Poliedri. CAP. X. Superficie geometriche. CAP. XI. Sup. coniche. CAP. XII. Sup. cilindrica. CAP. XIII. Projezioni assonometriche. CAP. XIV. Projezioni quotate.

C. RANELLETTI. *Applicazioni di geometria descrittiva.* Teoria delle ombre. Taglio delle pietre, taglio dei legnami. Ad uso dei RR. Istituti tecnici e delle scuole professionali. Con 133 Figure espressamente disegnate. 1914. p. X 201. Prezzo L. 2.

Digitized by Google

Abel 123.
Abu Kamil 95.
Aggiunti 83.
Albèri 2.
Alchwarizmi 31, 36, 37.
d'Alembert 20.
Allman 9.
Altenburger 23.
Amici 89, 92.
Anarizio 10.
Angelitti 31.
Apollonio 12.
Appell 20, 25, 127.
Arago 20.
Argand 95.
Archimede 11, 12, 20, 21, 22.
Archita 11.
Aristarco 6, 12.
Aristotele 12, 15.
Arrighetti Andrea 4.
» Giulio 4.
Atwood 41.
Autonne 52.

Bachet 21.
Bacone 96.
Bahaim 13.
Baillaud 62.
Baker 76.
Ball (Rouse) 25.
Beck 53.
Beldomandi 4, 34.
Benini 64.
Bernoulli 94.
Bertrand 20, 39.
Betti 81.
Beutel 32.
Bigourdan 62.
Biringuccio 63.
Blondel 93.
Bochert 52.
Boezio 19.
Bompiani 97, 108.
Boncompagni 34, 37.
Bonola 14.
Borel 53, 54, 117, 124.
Borelli 65, 70.
Bortolotti 33, 94.
Bretschmeider 9.
Breusing 13.
Broggi 22, 23.
Burali-Forti 82.
Burns 95.
Burnside 52.

Cajori 94.
Cantor 6, 9, 14. 19, 34.
Cardano 35.
Carlebach 13, 15.
Caronnet 89.
Casiri 35.
Catania 32.
Cattaneo 34.
Cauchy 64. 99.
Cayley 77.
Cha-ma-li-ting 114.
Chang 112.
Chasles 19, 36.
Clemente VI. 14.
Combebiac 63.
Copernico 14.
Copley 77.
Corbino 25, 80.
Coriolis 43, 80.
Cossali 35, 36, 37.
Curtze 14.
Czuber 30.

Dante 31.
Darboux 19, 20.
Demartres 127,
Denton 107.
Descartes 5.
Dickson 52.
Dienes P. 124.
» Valérie 124.
Dingeldey 83,
Diofanto 6, 10, 11, 12.
Dirichlet 59, 124.

Eells 95.
Eiffel 41.

Digitized by Google

Enestrom 13, 15, 33, 96.
Engel 15.
Enriques 70.
Erone 10, 11, 114.
Euclide 3, 10, 11, 34, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 75, 86, 115.
Eudemo 12.
Eudo 110.
Eudosso 11, 12, 38.
Eulero 62, 94, 95, 96.

Fabroni 72.
Fantasia 128.
Favaro A. 2, 3, 20-21, 34, 36, 64, 93, 94.
» G. 93.
Fermat 6, 21, 53, 92.
Fibonacci (Leonardo Pisano) 38.
Flotow 24.
Fonhan 93.
Fontana 93.
Fontenelle 20.
Fourier 26, 27, 32.
Fredholm 60, 122, 124.
Fricke 59-60.
Frobenius 52.
Fubini 25-30, 60, 61, 109.
Füter 18.

Galdeano 49-51.
Galileo 1, 2, 3, 4, 21, 65, 69, 75, 76, 93, 94.
Galois 52.
Gambioli 25.
Gauss 99.
Gennari 92.
Gergonne 99.
Gesù 115.
Giacobbe 12.
Gibbs 82.
Giorgi 48, 83.
G. L. vedi Loria.
Goethe 114.
Geursat 28.
Grassmann 99.
Green 26, 107.
Guasti 94.
Günther 14.
Guglielmini 34.

Hadamard 121, 124.
Hahn 17.
Halliwell 33, 34.
Halsted 15, 109.
Hamilton 120.
Hankel 9.
Harriot 114.
Hatt 62.
Heath 13, 22.
Heiberg 6, 7, 21.
Hensel 126-7.
Hilbert 18, 60, 61.
Hobson 61.
Hopstock 93.
Horner 114.
Hultsch 9.
Hunrat 33.
Hurwitz 87.
Huygens 94.

Ingrami 32.
Ippocrate 12.

Jacobi 120.
Jordan 52.
Jourdain 64.

Karpinski 18, 95.
Keplero 82.
Kirchhoff 42,
Klein 32, 59-60.
Koebe 60.
Küstner 32.
Kummer 18.

Laplace 54, 81.
Lecat 18.
Leibniz 94.
Levi ben Gerson 13-15.
Levi E. E. 30, 61.
Libri Guglielmo 36, 37, 94.
» Giorgio 94.
Lie 100.
Liebmann 54.
Little 96.
Liouville 87.
Liu-Hui 112.
Loria 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 25, 30, 31, 39, 53, 54, 56, 58, 62, 64, 65, 77, 85, 87, 117, 127.

Digitized by Google

Loewy 24.
Love 61.

Macfarlane 63.
Mach 89, 41, 42, 78.
Maggi 39-48, 78-83.
Maillet 52, 87.
Manning 52.
Marcolongo 82.
Mariotti 4, 5.
Martin 12, 19.
Maxwell 61.
Medici 99.
Mefistofele 114.
Menone 9, 10.
Meyer 30.
Mezio 113.
Mieli 63.
Mikami 109-116.
Miller 32, 95.
Minkowski 16, 61.
Mittag-Leffler 124, 125.
Mohammed ben Musa 35.
Moore 52, 107.
del Monte 94.
Morgagni 63.
de Morgan 77.
Muir 16-17.

Narducci 34.
Nepero 91.
Netto 52.
Newton 41, 82.
Nyberg 107.

Osgood 51-52.
Ostwald 63.

Padé 88.
Padoa 53.
Pappo 12, 38.
Peano 32, 90.
Pearson 95.
Pell 11, 87.
Pérès 117.
Perron 87-89.
Pieri 32.
Piola 79.
Pitagora 115.
Pitollet 94.
Platone Ateniese 9, 115.
» Tiburtino 34.
Podetti 75.
Poincaré 49.
Polo (Marco) 115.
Poncelet 99.
Porta 14.
Plücker 99, 100.
Preti 3.
Psello 10.

Ranelletti 128.
Ranum 107.
Reaves 107.
Reech 42.
Regiomontano 13, 14.
Reinaud 36, 37.
Riccardi 34.
Ricci 115.
Riemann 59, 124.
Roberts W. 38.
Rudio 96.
Ruffini 92, 94, 104.
Ruggiero 115,

Sacrobosco 33, 34.
Salviati 4.
Salmon 76.
Sanchez Perez 128.
Sarton 64.
Schaal 115.
Schiaparelli 12.
Schilling 31.
Schwarz 59.
Seguier 52.
Serenai 5.
Sernigi Giulio 4.
» Maria 4.
Simplicio 12.
Smith 18, 64, 77, 96.
Sommerville 15-16.
Sonine 123.
Spallanzani 63.
Stäckel 15, 53, 54.
Steinscheider 13.
Stieltjes 88.
Stokes 26, 120.
Stolz 92.

Digitized by Google

Steuffer 108.
Study 54.
Sullivan 107.
Sun-Tsu 111.
Sylvester 76-77.

Tannery Jules 7.
» Marie 7.
» Paul 7.
Tartaglia 33, 35, 64, 93.
Taylor 27, 120.
Teixeira 38-39.
Terracini 109.
Teubner 128.
Thiele 95.
Tomassetti 117.
Tonni-Bazza 64.
Torres Quevedo 128.
Torricelli 1-6, 65-76.
Tsu Ch'ung-chih 113.

Vailati 79.
de la Vallée Poussin 28.
Vangesten 93.
Vassura 2.
Vinci (Leonardo da) 14, 93.
Vivanti 51, 52, 85-87, 126, 127.
Viviani 2, 3, 4, 5, 21, 38, 70, 72, 93.
Vlacq 115.
Volterra 81, 117-124.
Vuibert 55-56.

Wang Yuen Ching 115.
Wantzell 94.
Webster 48.
Wessel 95.
Wilczinski 97, 108.
Wilson 92.
Woepke 19.

Yüan Yüan 110.

Zarlatti 117.
Zeuthen 6, 7, 10.
Zillmer 23.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

508960 [redacted]
QA
1
.B7
v.16-17
Sci

Digitized by Google

UNIVERSITY OF CHICAGO
63 387 022

Digitized by Google